

2×3×5×⋯×p+1（pは素数）の値について

「素数は無限個ある」

（証明）素数は有限個しかないと仮定すると、最大の素数があるから、それを p とする。

すべての素数を 1 つずつ掛け合わせ、1 を加えた数 N をつくる。すなわち、 $N = 2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p + 1$

N はどのような素数で割っても 1 余り、 $N > p$ であるから、 N は p より大きな素数となる。

これは最大の素数を p としたことに矛盾する。

よって、最大の素数はないことから、素数は無限個ある。■

この背理法による証明は有名である。

つい先日まで、 $2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p + 1$ （ p は素数）の値は素数になるものと思っていた。

しかし、確かめてみると、素数になる場合の方が珍しいことが分かった。

次の通り、2 から 2657 まで素数は 384 個ある。

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847, 1861, 1867, 1871, 1873, 1877, 1879, 1889, 1901, 1907, 1913, 1931, 1933, 1949, 1951, 1973, 1979, 1987, 1993, 1997, 1999, 2003, 2011, 2017, 2027, 2029, 2039, 2053, 2063, 2069, 2081, 2083, 2087, 2089, 2099, 2111, 2113, 2129, 2131, 2137, 2141, 2143, 2153, 2161, 2179, 2203, 2207, 2213, 2221, 2237, 2239, 2243, 2251, 2267, 2269, 2273, 2281, 2287, 2293, 2297, 2309, 2311, 2333, 2339, 2341, 2347, 2351, 2357, 2371, 2377, 2381, 2383, 2389, 2393, 2399, 2411, 2417, 2423, 2437, 2441, 2447, 2459, 2467, 2473, 2477, 2503, 2521, 2531, 2539, 2543, 2549, 2551, 2557, 2579, 2591, 2593, 2609, 2617, 2621, 2633, 2647, 2657

この中で $2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p + 1$ が素数になるのは次の通り 10 個しかない。

No.	p	$2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times p + 1$	値	素因数分解
1	2	$2 + 1 =$	3	素数
2	3	$2 \times 3 + 1 =$	7	素数
3	5	$2 \times 3 \times 5 + 1 =$	31	素数
4	7	$2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1 =$	211	素数
5	11	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 + 1 =$	2311	素数
6	13	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 =$	30031	$= 59 \times 509$
7	17	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 + 1 =$	510511	$= 19 \times 97 \times 277$
8	19	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 + 1 =$	9699691	$= 347 \times 27953$
9	23	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 + 1 =$	223092871	$= 317 \times 703763$
10	29	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 + 1 =$	6469693231	$= 331 \times 571 \times 34231$
11	31	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 + 1 =$	200560490131	素数
12	37	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 37 + 1 =$	7420738134811	$= 181 \times 60611 \times 676421$
この間の数はすべて合成数				
75	379	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times \cdots \times 379 + 1 =$	$p(75)$	素数
この間の数はすべて合成数				
171	1019	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times \cdots \times 1019 + 1 =$	$p(171)$	素数
172	1021	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times \cdots \times 1021 + 1 =$	$p(172)$	素数
この間の数はすべて合成数				
384	2657	$2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times \cdots \times 2657 + 1 =$	$p(384)$	素数

$p(75)=$ 17196201054584064334833405683175430195845756358957425604387711050583216552385626
 13083979651479555788009994557822024565226932906295208262756822275663694111
 $p(171)=$ 20404068993016374194542464172774607695659797117423121913227131032339026169175929
 90224445375741046872884292986227160556781882168549067666198538983995862280246598
 68813761394041383761530961031408346655636467401602797552123175013568630036386123
 90661668406235422311783742390510526587257026500302696834793248526734305801634165
 94870250636717670123329806461666355371697542904875157559715041738106393425568912
 4486029492908966644747931
 $p(172)=$ 20832554441869718052627855920402874457268652856889007473404900784018145718728624
 43019158728631608857214863138937930928474301694088598087188708302659775388131777
 26058850383316252820523111213067921935404833217036456300717761688853571267150232
 50865563442766366180331200980711247645589424056809053468323906745795726223468483
 43362525900088741195919732397361348834503191305877535868469057614606627687505859
 6100236112260054944287636531
 $p(384)=$ 78244737296323701708091142569062680832012147734404650078590391114054859290061421
 83751699865554977697229946127687662374892253913198479980343336356229997770180854
 92552042629201517236242969387773417387518064509930154467125225099893166734205067
 49359414629957842716112900306643009542215969000431330219583111410996807066475261
 56030318260963605610836741232450844434117802828920180351809384298287766262155275
 62796692413033621528951604797200401283355182471258495210998412729835889355808886
 30036283712163901558436498481482160712530124868714141094634892999056865426200254
 64724197954893508762130852654713812598710206268856848625093944706579835362674516
 93805794422330068984447002642403214828238598420445241145767847952948187555251691
 92652108755230262128210258672754900845837728345782457465793874408469588052577208
 64375401905375639415104151209959892555772434309926468515593489143916186625011304
 71855535117974067641159072487134058175947295506000828083243313871436798003553568
 11873430669962333651282822030473702042073141618450021084993659382646598194115178
 864433545186250667775794249961932761063071117967553887984011652643245393971

※計算は、Mathematica を利用した。

(2019/2/16 時岡)