

2円の共通接線で囲まれる図形の面積について

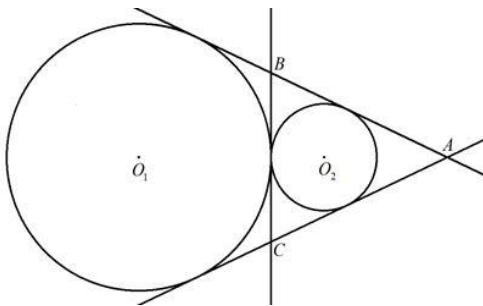
1 はじめに

2円 O_1, O_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 ($r_1 > r_2$) とする。

次の2つの場合を考える。

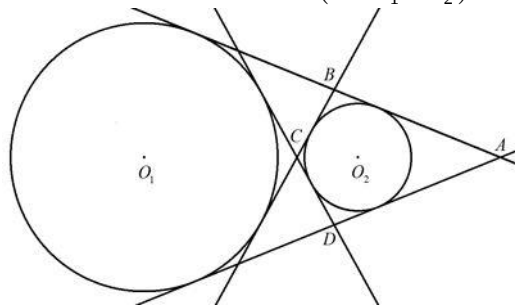
(1) 2円が外接しているとき

2円の共通接線で囲まれる三角形 ABC の面積



(2) 一方が他方の外部にあるとき

2円の共通接線で囲まれる四角形 $ABCD$ の面積 (2円の中心距離を d ($d > r_1 + r_2$))



2 (1)の場合

図のように、共通外接線 AB と 2円

O_1, O_2 との接点をそれぞれ E, F ,

O_2 から O_1E に下した垂線の足を G ,

BC と O_1O_2 との交点を H とする。

直角三角形 GO_1O_2 の3辺は,

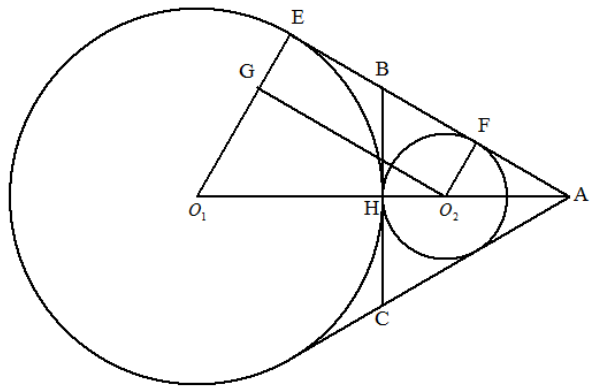
$$GO_1 = r_1 - r_2, O_1O_2 = r_1 + r_2,$$

$$GO_2 = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2} \text{ である。}$$

$\triangle GO_1O_2 \sim \triangle FO_2A$ で, $FO_2 = r_2$ であるから,

$$(r_1 - r_2) : r_2 = (r_1 + r_2) : O_2A \text{ より } O_2A = \frac{r_2(r_1 + r_2)}{r_1 - r_2}$$

$$HA = r_2 + O_2A = r_2 + \frac{r_2(r_1 + r_2)}{r_1 - r_2} = \frac{2r_1 r_2}{r_1 - r_2}, \quad BC = EF = 2\sqrt{r_1 r_2}$$



$$\text{よって, } \triangle ABC = \frac{1}{2} BC \times HA = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{r_1 r_2} \times \frac{2r_1 r_2}{r_1 - r_2} = \frac{2r_1 r_2 \sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2} \quad \dots (\text{答})$$

3 (2)の場合

図のように, 外共通接線

AB と 2 円 O_1, O_2 との接点

をそれぞれ E, F,

O_2 から $O_1 E$ に下した垂線

の足を G, 内共通接線 CD

と 2 円 O_1, O_2 との接点をそ

れぞれ H, I,

O_2 から $O_1 H$ の延長に下した垂線の足を J とする。また, BD と CA の交点を K,

$\angle GO_1 O_2 = \angle FO_2 A = \angle ABD = \alpha, \angle JO_1 O_2 = \angle IO_2 C = \angle CBD = \beta$ とする。

直角三角形 $GO_1 O_2$ の 3 辺は, $O_1 O_2 = d, O_1 G = r_1 - r_2, O_2 G = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$ である。

$\triangle GO_1 O_2 \sim \triangle FO_2 A$ で, $O_2 F = r_2$ であるから,

$$(r_1 - r_2) : r_2 = d : O_2 A \text{ より, } O_2 A = \frac{r_2 d}{r_1 - r_2} \quad \dots \textcircled{1}$$

直角三角形 $JO_1 O_2$ の 3 辺は, $O_1 O_2 = d, O_1 J = r_1 + r_2, O_2 J = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$ である。

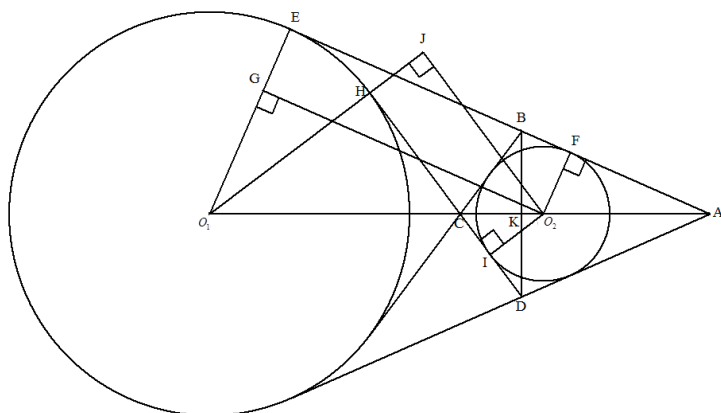
$\triangle JO_1 O_2 \sim \triangle IO_2 C$ で, $O_2 I = r_2$ であるから,

$$(r_1 + r_2) : r_2 = d : O_2 C \text{ より, } O_2 C = \frac{r_2 d}{r_1 + r_2} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } CA = \frac{r_2 d}{r_1 - r_2} + \frac{r_2 d}{r_1 + r_2} = \frac{2r_1 r_2 d}{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)} \quad \dots \textcircled{3}$$

次に, $\angle KBA = \alpha, \angle KBC = \beta$ であるから,

$$KA = BK \tan \alpha, CK = BK \tan \beta \text{ より } CA = BK(\tan \alpha + \tan \beta) \quad \dots \textcircled{4}$$



$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{より } BK = \frac{2r_1 r_2 d}{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)} \times \frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta}$$

四角形 ABCD の面積を S とおくと

$$S = \frac{1}{2} CA \times BD = CA \times BK = \frac{2r_1 r_2 d}{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)} \times \left\{ \frac{2r_1 r_2 d}{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)} \times \frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta} \right\}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta} &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{(1 + \tan^2 \alpha) - (1 + \tan^2 \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cos^2 \beta}} \\ &= (\tan \alpha - \tan \beta) \times \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta - \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

この式に, $\cos \alpha = \frac{r_1 - r_2}{d}$, $\cos \beta = \frac{r_1 + r_2}{d}$ を代入すると

$$\frac{1}{\tan \alpha + \tan \beta} = (\tan \alpha - \tan \beta) \times \frac{\left(\frac{r_1 - r_2}{d}\right)^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{d}\right)^2}{\left(\frac{r_1 + r_2}{d}\right)^2 - \left(\frac{r_1 - r_2}{d}\right)^2} = (\tan \alpha - \tan \beta) \times \frac{(r_1 - r_2)^2 (r_1 + r_2)^2}{4r_1 r_2 d^2}$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{2r_1 r_2 d}{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)} \times \left\{ \frac{2r_1 r_2 d}{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)} \times (\tan \alpha - \tan \beta) \times \frac{(r_1 - r_2)^2 (r_1 + r_2)^2}{4r_1 r_2 d^2} \right\} \\ &= r_1 r_2 (\tan \alpha - \tan \beta) \quad \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$(\text{ただし, } \tan \alpha = \frac{\sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}}{r_1 - r_2}, \tan \beta = \frac{\sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}}{r_1 + r_2})$$

4 おわりに

(1)で, $\angle ABC = \alpha$ とおくと, $\angle GO_1 O_2 = \alpha$ より $\tan \alpha = \frac{GO_2}{GO_1} = \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2}$ であるか

ら, $\triangle ABC = r_1 r_2 \times \frac{2\sqrt{r_1 r_2}}{r_1 - r_2} = r_1 r_2 \tan \alpha$ と表される。

これは、(2)で $\beta = \angle CBD \rightarrow 0$ としたもので、2本の共通内接線は(1)の O_1O_2 に垂直な1本の共通接線BCとなり、四角形ABCDは三角形ABCになることを示している。

【まとめ】2円 O_1, O_2 の半径をそれぞれ

$r_1, r_2 (r_1 > r_2)$ とする。

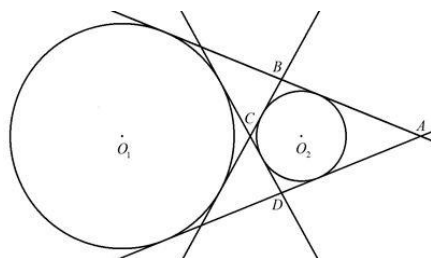
2円の中心間の距離が $d (d \geq r_1 + r_2)$ であるとき、2

円の共通接線で囲まれる四角形ABCDの面積Sは、

$$S = r_1 r_2 (\tan \alpha - \tan \beta)$$

$$\text{ただし、} \tan \alpha = \frac{\sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}}{r_1 - r_2}, \tan \beta = \frac{\sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}}{r_1 + r_2} \quad (\alpha = \angle ABD, \beta = \angle CBD)$$

特に、 $d = r_1 + r_2$ のとき ($\beta = 0$) にも成り立つ。



【例1】(四角形ABCDの面積) $r_1 = 3, r_2 = 1, d = 5$ のとき

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{5^2 - (3-1)^2}}{3-1} = \frac{\sqrt{21}}{2}, \tan \beta = \frac{\sqrt{5^2 - (3+1)^2}}{3+1} = \frac{3}{4} \text{であるから}$$

$$S = 3 \times 1 \left(\frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{3}{4} \right) = \frac{3(2\sqrt{21} - 3)}{4} \quad \dots \text{ (答)}$$

【例2】(三角形ABCの面積) $r_1 = 4, r_2 = 1, d = 5$ のとき

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{5^2 - (4-1)^2}}{4-1} = \frac{4}{3} \text{であるから}$$

$$S = 4 \times 1 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3} \quad \dots \text{ (答)}$$

(2017/2/6 時岡)