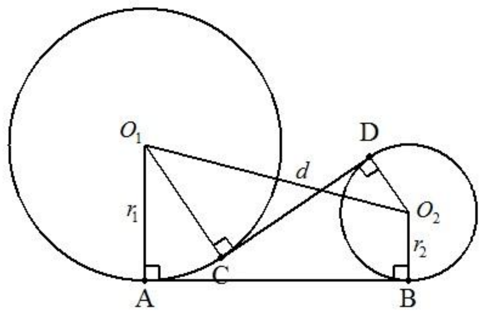
三平方の定理と円　（中心O，半径rの円を$O(r)$で表す。）

① 2円$O_1(r_1), O_2(r_2)$について，2円の中心距離を$d(>r_1+r_2)$とすると

共通外接線の長さ：$\boxed{\mathrm{AB}=\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}}$

共通内接線の長さ：$\boxed{\mathrm{CD}=\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}}$

◎三平方の定理より得られる。

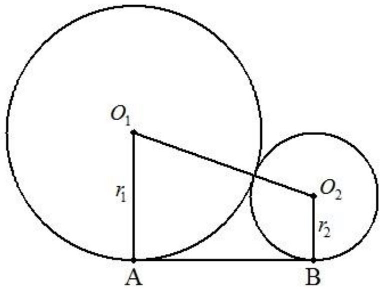


② 外接する2円$O_1(r_1), O_2(r_2)$について，$(d=r_1+r_2)$

共通接線の長さ：$\boxed{\mathrm{AB}=2\sqrt{r_1r_2}}$

◎①で，$d=r_1+r_2$の場合

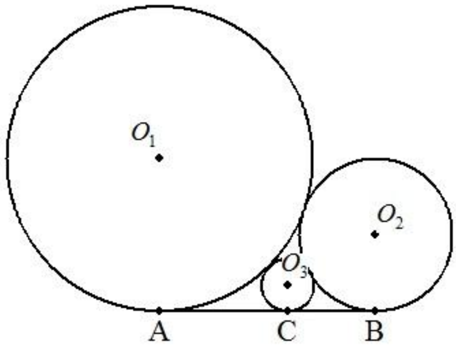
$\mathrm{AB}=\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=\sqrt{4r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_2}$



③ 外接する2円$O_1(r_1), O_2(r_2)$の共通接線の接点をA, Bとする。ABに接して2円に外接する円を$O_3(r_3)$とすると，

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{r_3}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}}$$

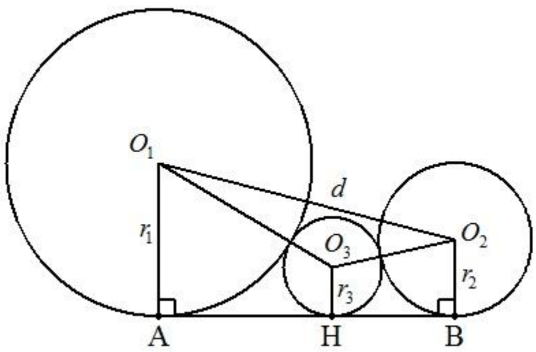
◎AB＝$2\sqrt{r_1r_2}$，AC＝$2\sqrt{r_1r_3}$，CB＝$2\sqrt{r_3r_2}$をAB=AC＋CBに代入し，両辺を$2\sqrt{r_1r_2r_3}$で割ると得られる。



④ 2円$O_1(r_1), O_2(r_2)$について，2円の中心距離をd，共通外接線との接点をA, B, ABに接して2円に外接する円を$O_3(r_3)$とすると，

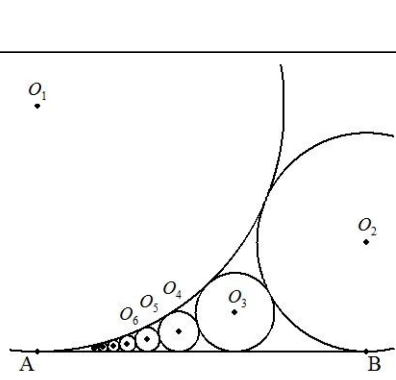
$$\boxed{r_3=\frac{d^2-(r_1-r_2)^2}{4\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}\right)^2}}$$

◎AB＝$\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$，AH＝$2\sqrt{r_1r_3}$，HB＝$2\sqrt{r_3r_2}$をAB=AH＋HBに代入し，両辺を$2\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}\right)$で割ると得られる。



⑤ 外接する2円$O_1(r_1), O_2(r_2)$と共通外接線ABに接する円を$O_3(r_3)$とし，さらに2円$O_1(r_1), O_3(r_3)$とABに接する円を$O_4(r_4)$とする。こうして次々と連結する円$O_n(r_n)$をつくる。このとき，

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{n-2}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}\ (n\geqq 3)}$$　←③の公式から得られる。



（2012/2/10　時岡）