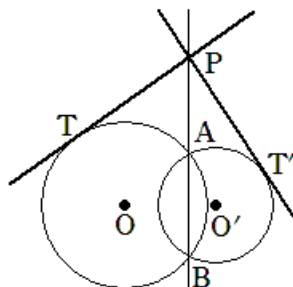


2円へ引いた接線の長さが等しい点Pの軌跡について

1 はじめに

本校の中2で使用している教材（体系数学2 幾何編 p.97）に、次の例題が記載されていた。

例題 4 2点 A, B で交わる円 O, O' がある。右の図のように、直線 AB 上の点 P から、この2つの円とそれぞれ点 T, T' で接する2本の接線 PT, PT' を引くとき、
 $PT = PT'$
 であることを証明しなさい。



「交わる2円の交点を通る直線上の点から2円に引いた接線の長さは等しい。」というもので、証明は方べきの定理で簡単に示される。

そこで、一方が他方の外部にある2円に対して、引いた接線の長さが等しい点の軌跡はどうなるか、考えてみた。

2 2円へ引いた接線の長さが等しい点Pの軌跡（一方が他方の外部にある2円）

点Pの座標を (x, y) とおく。

2円 O_1, O_2 を次のように定義する。

中心 $O_1(x_1, y_1)$ 、半径 r_1 の円を、

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

中心 $O_2(x_2, y_2)$ 、半径 r_2 の円を、

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - r_2^2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

とおく。

$$\text{ただし、} O_1O_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} > r_1 + r_2 \cdots \textcircled{3}$$

点Pから2円に引いた接線の接点をそれぞれ T_1, T_2 とすると、仮定より、 $PT_1 = PT_2$

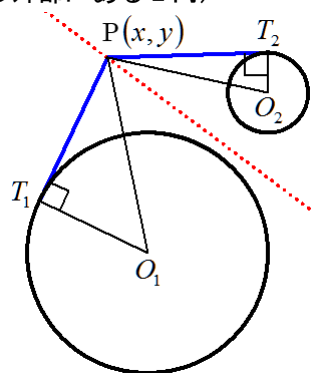
で、 $O_1P = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}, O_2P = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$ であるから

$$PT_1^2 - PT_2^2 = 0$$

$$(O_1P^2 - r_1^2) - (O_2P^2 - r_2^2) = 0 \quad (\text{三平方の定理より})$$

$$\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2\} - \{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - r_2^2\} = 0 \cdots \textcircled{4}$$

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0 \cdots \textcircled{5}$$

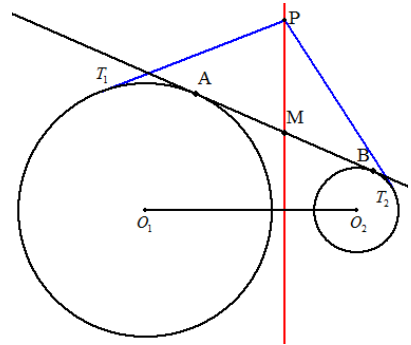


よって、軌跡の方程式は、直線⑤である。

幾何学的には、2円の共通外接線をABとすると
(A, Bは接点), ABの中点Mを通り、線分 O_1O_2 に
垂直な直線である。

なお、⑤の直線を2円の根軸という。

また、特に③は使っていないので、次にこの条件を
はずして考えてみる。



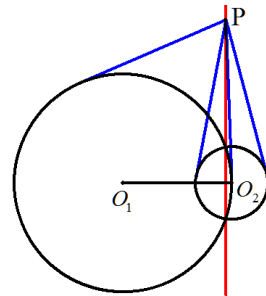
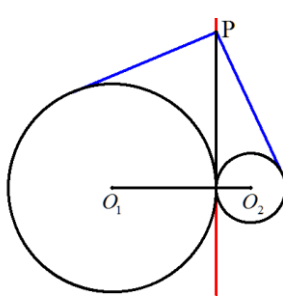
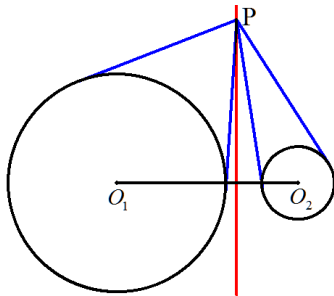
3 2円へ引いた接線の長さが等しい点Pの軌跡(2円の5通りの位置に対して)

2円の方程式が与えられていたとする。その2円の位置関係は次の5通りある。

[1] 一方が他方の外部

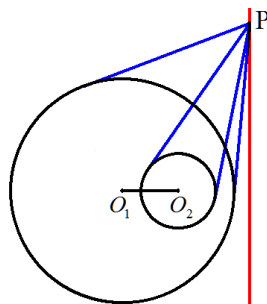
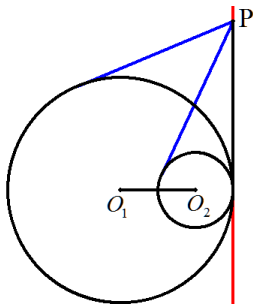
[2] 外接

[3] 交わる



[4] 内接

[5] 一方が他方の内部



(1) この軌跡を根軸という。

(2) 根軸は、中心を結ぶ直線 O_1O_2 に垂直である。

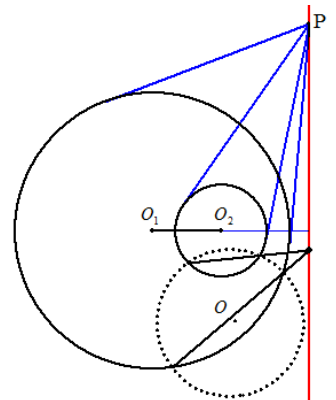
(3) [5] の位置関係で、中心が一致するとき根軸はない。

(4) 共有点を持たない2円の根軸の作図法

3円の2円ずつの根軸は1点で交わる。(*)

この性質を利用すると作図ができる。

例えば [5] の場合、2円 O_1, O_2 と交わる円 O を描き(図では点



線), O と O_1 , O と O_2 の根軸の交点を通り, 中心を結ぶ直線 O_1O_2 に垂直になるように直線を描けばよい。

(*) の証明

3 円の方程式を $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \cdots <1>$
 $x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0 \cdots <2>$
 $x^2 + y^2 + a_3x + b_3y + c_3 = 0 \cdots <3>$ とおく。
 $<1>$ と $<2>$ の根軸: $(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0 \cdots <4>$
 $<2>$ と $<3>$ の根軸: $(a_2 - a_3)x + (b_2 - b_3)y + c_2 - c_3 = 0 \cdots <5>$
 $<1>$ と $<3>$ の根軸: $(a_1 - a_3)x + (b_1 - b_3)y + c_1 - c_3 = 0 \cdots <6>$
 である。
 $<4> + <5>$ を計算すると $<6>$ が得られる。
 これは, $<4>$ と $<5>$ の交点が $<6>$ 上にあることを示している。
 よって, 3 円の 2 円ずつの根軸は 1 点で交わる。■

4 おわりに

④の式は, ①-②を辺々計算したものである。

よく, 交わる 2 円の方程式が与えられていて, 共通弦の方程式を求めさせる問題があるが, その計算方法である。

また, 共有点を持たない 2 円の方程式が与えられて, 同様の計算をすると 1 次方程式が得られるが, この直線は何を意味するのかという議論があった。

私も含めて, ①-②は共通弦の方程式を求める際の簡単な計算方法と教えられてきた世代から見ると不思議 (交わらないのに方程式が求まる) だが, 今回のように 2 円へ引いた接線の長さが等しい点 P の軌跡 (根軸) とわかると, 不思議なことではない。

蛇足だが, ①, ②で円の方程式を $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ の形にしなかったのは,

g, f, c の値によって, 実円 ($g_1^2 + f_1^2 - c > 0$), 点円 ($g_1^2 + f_1^2 - c = 0$),

虚円 ($g_1^2 + f_1^2 - c < 0$) となる煩雑さを回避するためである。

【参考文献】

- [1] 四訂版 体系数学 2 幾何編 数研出版
- [2] 初等解析幾何学第 2 版 (矢野健太郎著) 岩波全書 1970 年

(2017/2/1 時岡)