

2つの放物線から得られる直線について

1 はじめに

タイトルを正確に表すと、「軸が y 軸に平行な 2 つの放物線の方程式から x^2 の項を消去した 1 次方程式（直線）は 2 つの放物線の何を表しているのか。」ということである。

この問題を考えるきっかけは、

2 つの円 $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ と $x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$ について、（前式）－（後式）を計算して得られる 1 次方程式 $(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$ は、根軸（2 つの円に引いた接線の長さが等しい点の軌跡）を表していることが知られている。（参考文献[1]）

具体的には、2 円が異なる 2 つの共有点をもつとき、共通弦の方程式を、2 円が 1 つだけ共有点をもつとき、その共有点における共通接線の方程式を表す。

同様に、2 つの放物線から得られる直線は何を表しているのか疑問に思ったので考えてみた。

2 本題

2 つの放物線 $y = a_1x^2 + b_1x + c_1 \cdots \textcircled{1}$ と $y = a_2x^2 + b_2x + c_2 \cdots \textcircled{2}$ から x^2 の項を消去する

と直線の方程式 $\frac{b_1x + c_1 - y}{a_1} = \frac{b_2x + c_2 - y}{a_2} \cdots \textcircled{3}$ が得られる。

次の場合に、③は①と②の何を表すか。

- (1) ①と②が異なる 2 つの共有点をもつ。
- (2) ①と②が 1 つだけ共有点をもつ。
- (3) ①と②が共有点をもたない。

(1) 異なる 2 つの共有点を通る直線を表す。

($\because$) ①、②を変形すると、

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 - y = 0 \cdots \textcircled{1}'$$

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 - y = 0 \cdots \textcircled{2}'$$

①'、②'の共有点を通るグラフの方程式は、

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1 - y) + k(a_2x^2 + b_2x + c_2 - y) = 0 \cdots \star$$

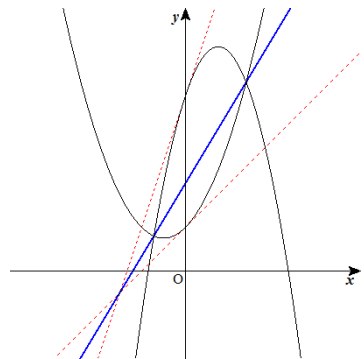
と表される。

x^2 の係数が 0 になるように k の値を定めると、

$$a_1 + a_2k = 0 \text{ より } k = -\frac{a_1}{a_2}$$

このとき、 $\star$ は $(a_1x^2 + b_1x + c_1 - y) - \frac{a_1}{a_2}(a_2x^2 + b_2x + c_2 - y) = 0$

$$\therefore \frac{b_1x + c_1 - y}{a_1} = \frac{b_2x + c_2 - y}{a_2} \text{ となる。} \blacksquare$$



(2) 接する場合と x^2 の係数が等しい場合があるから、場合分けをする。

[1] $a_1 \neq a_2$ のとき

(1)で、2つの共有点の座標を

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ($x_1 < x_2$) とおくと、この2点を通

る直線は $\frac{b_1x+c_1-y}{a_1} = \frac{b_2x+c_2-y}{a_2}$ である。 x_2 を x_1 に

しだいに近づけると、点Bは点Aに近づき、2点A, Bを通る直線は点Aにおける接線に近づく。

よって、 $\frac{b_1x+c_1-y}{a_1} = \frac{b_2x+c_2-y}{a_2}$ は①と②の共有点に

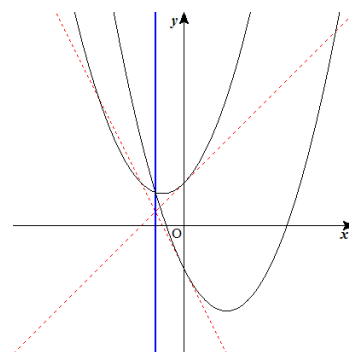
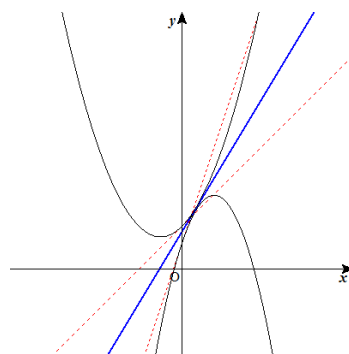
おける共通接線の方程式を表す。

[2] $a_1 = a_2$ のとき

①-②を計算すると $(b_1 - b_2)x + c_1 - c_2 = 0$

共有点を1つもつので、 $b_1 \neq b_2$ として、 $x = -\frac{c_1 - c_2}{b_1 - b_2}$

これは共有点を通る y 軸に平行な直線を表す。



(3) $l_1: b_1x + c_1 - y = 0$ は、①の $x=0$ における接線を表す。

同様に、 $l_2: b_2x + c_2 - y = 0$ は、②の $x=0$ における接線を表す。

いま、点 $P(x, y)$ と l_1, l_2 の距離をそれぞれ d_1, d_2 とおくと、

$$d_1 = \frac{|b_1x + c_1 - y|}{\sqrt{b_1^2 + 1}}, d_2 = \frac{|b_2x + c_2 - y|}{\sqrt{b_2^2 + 1}} \dots \textcircled{4} \text{である。}$$

$$\textcircled{3} \text{の両辺の絶対値をとると, } \frac{|b_1x + c_1 - y|}{|a_1|} = \frac{|b_2x + c_2 - y|}{|a_2|}$$

$$\text{これと}\textcircled{4}\text{より, } \frac{d_1 \sqrt{b_1^2 + 1}}{|a_1|} = \frac{d_2 \sqrt{b_2^2 + 1}}{|a_2|} \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{|a_1|}{\sqrt{b_1^2 + 1}}}{\frac{|a_2|}{\sqrt{b_2^2 + 1}}} \quad \therefore d_1 : d_2 = \frac{|a_1|}{\sqrt{b_1^2 + 1}} : \frac{|a_2|}{\sqrt{b_2^2 + 1}}$$

よって、

2つの放物線 $y = a_1x^2 + b_1x + c_1 \dots \textcircled{1}$ と $y = a_2x^2 + b_2x + c_2 \dots \textcircled{2}$ から x^2 の項を消去する

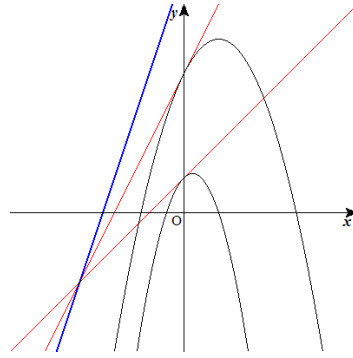
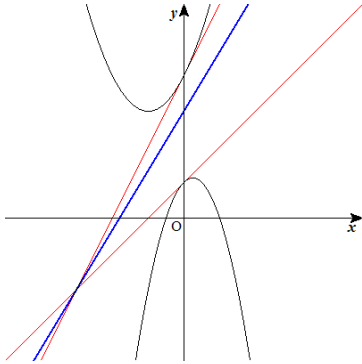
と直線の方程式 $\frac{b_1x + c_1 - y}{a_1} = \frac{b_2x + c_2 - y}{a_2} \dots \textcircled{3}$ が得られる。

③は、①、②の $x=0$ における接線をそれぞれ l_1, l_2 とすると、点Pから、 l_1, l_2 までの

距離の比が $\frac{|a_1|}{\sqrt{b_1^2 + 1}} : \frac{|a_2|}{\sqrt{b_2^2 + 1}}$ である軌跡の方程式を表す。

もう少し詳しく調べてみる。

[1] $b_1 \neq b_2$ のとき, ③は l_1, l_2 の交点 P を通る。



P の座標は $\left(-\frac{c_1 - c_2}{b_1 - b_2}, \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_1 - b_2} \right)$

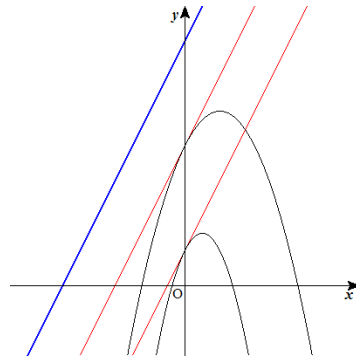
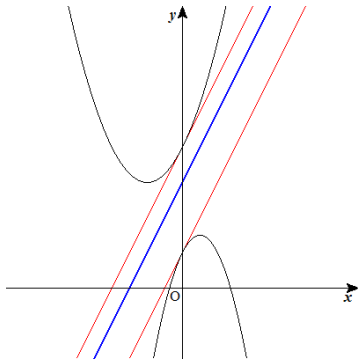
次に③と y 軸との交点 $Q(0, y)$ を求める。

③で, $x=0$ とおくと, $y = \frac{-a_2 c_1 + a_1 c_2}{a_1 - a_2} \therefore Q\left(0, \frac{-a_2 c_1 + a_1 c_2}{a_1 - a_2}\right)$

ここで, $C_1(0, c_1), C_2(0, c_2)$ とおくと, Q は $C_1 C_2$ を $a_1 : a_2$ に外分する点となっている。

(a_1, a_2 が異符号のときは内分, 同符号のときは外分となる。)

[2] $b_1 = b_2$ のとき, ③は l_1, l_2 と平行。



このとき, $d_1 : d_2 = \frac{|a_1|}{\sqrt{b_1^2 + 1}} : \frac{|a_2|}{\sqrt{b_2^2 + 1}} = |a_1| : |a_2|$

[1]と同様に, $C_1 C_2$ を $a_1 : a_2$ に外分する点を Q とすると, 軌跡は Q を通り l_1, l_2 に平行な直線となる。

(a_1, a_2 が異符号のときは内分, 同符号のときは外分となる。)

3 まとめ

(1)~(3), いずれの場合も, 次のようにまとめられる。

2つの放物線 $y = a_1x^2 + b_1x + c_1 \cdots \textcircled{1}$ と $y = a_2x^2 + b_2x + c_2 \cdots \textcircled{2}$ から x^2 の項を消去すると直線の方程式 $\frac{b_1x + c_1 - y}{a_1} = \frac{b_2x + c_2 - y}{a_2} \cdots \textcircled{3}$ が得られる。

③は、①、②の $x=0$ における接線をそれぞれ l_1, l_2 ， $C_1(0, c_1), C_2(0, c_2)$ を $a_1 : a_2$ に外分する点を Q とすると、

(1) $a_1 \neq a_2$ のとき

[1] $b_1 \neq b_2$ のときは、 l_1, l_2 の交点 P と Q を通る直線を表す。

[2] $b_1 = b_2$ のときは、 Q を通り、 l_1, l_2 に平行な直線を表す。

(2) $a_1 = a_2$ のとき

①、②の交点を通り、 y 軸に平行な直線を表す。

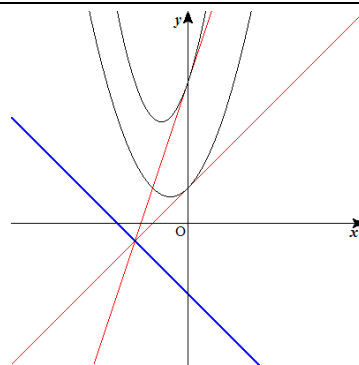
なお、(1)と(2)の場合のグラフに、 $x=0$ における接線（破線）を加えてあったのはこのためである。

4 終わりに

今回の「2つの放物線から得られる直線について」では、何も参考になる文献がない中で考えたので煩雑なレポートとなった。もう少し簡潔な意味づけがあるかもしれない。ぜひ、ご紹介いただきたい。

（作問例）

2つの放物線 $y = 2x^2 + 3x + 4 \cdots \textcircled{1}$ ， $y = x^2 + x + 1 \cdots \textcircled{2}$ について、 $x=0$ における①、②の接線をそれぞれ l_1, l_2 ，①、②と y 軸との交点をそれぞれ C_1, C_2 とする。 l_1, l_2 の交点 P と C_1C_2 を $2:1$ に外分する点 Q を通る直線の方程式を求めよ。



（解）2式から x^2 を消去して、 $y = -x - 2 \cdots$ （答）

【参考文献】

[1] こだわり数学 85 2円へ引いた接線の長さが等しい点 P の軌跡について(PDF)

(2019/2/2 時岡)

(2019/4/7 時岡)