

■ $(a-b)^{2n+1} + (b-c)^{2n+1} + (c-a)^{2n+1}$ の因数分解

$(a-b)^{2n+1} + (b-c)^{2n+1} + (c-a)^{2n+1} = a_n$ とおく。

$$a_1 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

($\because$) $a-b=x, b-c=y, c-a=z$ とおくと $x+y+z=0$ であるから

$$a_1 = x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$a_2 = 5(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

($\because$) a_2 は 5 次式で a, b, c についての交代式であるから,

3 次の交代式 $(a-b)(b-c)(c-a)$ を因数にもつ。

よって, $a_2 = (a-b)(b-c)(c-a)A$ とかける。

ここで A は 2 次の対称式であるから $A = B(a^2 + b^2 + c^2) + C(ab + bc + ca)$ とおける。

等式

$$\begin{aligned} & (a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5 \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)\{B(a^2 + b^2 + c^2) + C(ab + bc + ca)\} \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

は恒等式となるから

① において $a=0, b=1, c=-1$ とおくと

$$(-1)^5 + 2^5 + (-1)^5 = 2(2B - C)$$

$$\therefore 2B - C = 15 \cdots \textcircled{2}$$

① において $a=0, b=1, c=-2$ とおくと

$$(-1)^5 + 3^5 + (-2)^5 = 6(5B - 2C)$$

$$\therefore 5B - 2C = 35 \cdots \textcircled{3}$$

②, ③を連立させて解くと $B=5, C=-5$

これらを①に代入して, 結果が得られる。

$$a_3 = 7(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)^2$$

($\because$) a_3 は 7 次式で a, b, c についての交代式であるから,

3 次の交代式 $(a-b)(b-c)(c-a)$ を因数にもつ。

よって, $a_3 = (a-b)(b-c)(c-a)D$ とかける。

ここに D は 4 次の対称式であるから

$$D = E \sum a^4 + F \sum a^3b + G \sum a^2b^2 + H \sum a^2bc$$

とおける。

ここで

$$\begin{aligned}\sum a^4 &= a^4 + b^4 + c^4, \\ \sum a^3b &= a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3, \\ \sum a^4b^4 &= a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4, \\ \sum a^2bc &= a^2bc + ab^2c + abc^2\end{aligned}$$

を表わすものとする。

$$\begin{aligned}(a-b)^7 + (b-c)^7 + (c-a)^7 \\ = (a-b)(b-c)(c-a)(E\sum a^4 + F\sum a^3b + G\sum a^2b^2 + H\sum a^2bc) \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

は恒等式となるから

$$\textcircled{4} \text{において } a=0, b=1, c=-1 \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}(-1)^7 + 2^7 + (-1)^7 &= 2(2E - 2F + G) \\ \therefore 2E - 2F + G &= 63 \cdots \textcircled{5}\end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \text{において } a=0, b=1, c=-2 \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}(-1)^7 + 3^7 + (-2)^7 &= 6(17E - 10F + 4G) \\ \therefore 17E - 10F + 4G &= 343 \cdots \textcircled{6}\end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \text{において } a=0, b=1, c=-3 \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}(-1)^7 + 4^7 + (-3)^7 &= 12(82E - 30F + 9G) \\ \therefore 82E - 30F + 9G &= 1183 \cdots \textcircled{7}\end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \text{において } a=1, b=2, c=3 \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}(-1)^7 + (-1)^7 + 2^7 &= 2(98E + 145F + 49G + 36H) \\ \therefore 98E + 118F + 49G + 36H &= 63 \cdots \textcircled{8}\end{aligned}$$

⑤, ⑥, ⑦, ⑧を連立させて解くと

$$E=7, F=-14, G=21, H=0$$

これらを④に代入すると

$$\begin{aligned}(a-b)^7 + (b-c)^7 + (c-a)^7 \\ = 7(a-b)(b-c)(c-a)(\sum a^4 - 2\sum a^3b + 3\sum a^2b^2) \\ = 7(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)^2\end{aligned}$$

【まとめ】

$$\begin{aligned}(a-b)(b-c)(c-a) &= A, \\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= B\end{aligned}$$

とおく。

$a_1 = 3A$	
$a_2 = 5AB$	
$a_3 = 7AB^2$	

$a_4 = 3AC_4$	$C_4 = 3\sum a^6 - 9\sum a^5b + 19\sum a^4b^2 - 23\sum a^3b^3$ $+ 7\sum a^4bc - 7\sum a^3b^2c + 21a^2b^2c^2$
$a_5 = 11ABC_5$	$C_5 = \sum a^6 - 3\sum a^5b + 7\sum a^4b^2 - 9\sum a^3b^3$ $+ \sum a^4bc - \sum a^3b^2c + 3a^2b^2c^2$
$a_6 = 13AB^2C_6$	$C_6 = \sum a^6 - 3\sum a^5b + 8\sum a^4b^2 - 11\sum a^3b^3$ $- \sum a^4bc + \sum a^3b^2c - 3a^2b^2c^2$
$a_7 = AC_7$	$C_7 = 15\sum a^{12} - 90\sum a^{11}b + 365\sum a^{10}b^2 - 1000\sum a^9b^3$ $+ 2003\sum a^8b^4 - 3002\sum a^7b^5 + 3433\sum a^6b^6 + 260\sum a^{10}bc$ $- \sum a^9b^2c + 988\sum a^8b^3c - 1014\sum a^7b^4c + 416\sum a^6b^5c$ $+ 1443\sum a^8b^2c^2 - 1924\sum a^7b^3c^2 + 2509\sum a^6b^4c^2 - 2496\sum a^5b^5c^2$ $+ 1144\sum a^6b^3c^3 - 858\sum a^5b^4c^3 + 2145a^4b^4c^4$
$a_8 = 17ABC_8$	$C_8 = \sum a^{12} - 6\sum a^{11}b + 26\sum a^{10}b^2 - 75\sum a^9b^3$ $+ 156\sum a^8b^4 - 240\sum a^7b^5 + 277\sum a^6b^6 + 14\sum a^{10}bc$ $- 35\sum a^9b^2c + 51\sum a^8b^3c - 48\sum a^7b^4c + 18\sum a^6b^5c$ $+ 81\sum a^8b^2c^2 - 108\sum a^7b^3c^2 + 123\sum a^6b^4c^2 - 108\sum a^5b^5c^2$ $+ 88\sum a^6b^3c^3 - 66\sum a^5b^4c^3 + 165a^4b^4c^4$
$a_9 = 19AB^2C_9$	$C_9 = \sum a^{12} - 6\sum a^{11}b + 28\sum a^{10}b^2 - 85\sum a^9b^3$ $+ 184\sum a^8b^4 - 292\sum a^7b^5 + 341\sum a^6b^6 + 10\sum a^{10}bc$ $- 25\sum a^9b^2c + 29\sum a^8b^3c - 12\sum a^7b^4c + 2\sum a^6b^5c$ $+ 69\sum a^8b^2c^2 - 92\sum a^7b^3c^2 + 47\sum a^6b^4c^2 + 12\sum a^5b^5c^2$ $+ 152\sum a^6b^3c^3 - 114\sum a^5b^4c^3 + 285a^4b^4c^4$
$a_{10} = AC_{10}$	$C_{10} = 21\sum a^{18} - 189\sum a^{17}b + 1141\sum a^{16}b^2 - 4844\sum a^{15}b^3$ $+ 15505\sum a^{14}b^4 - 38759\sum a^{13}b^5 + 77521\sum a^{12}b^6 - 125969\sum a^{11}b^7$ $+ 167961\sum a^{10}b^8 - 184755\sum a^9b^9 + 931\sum a^{16}bc - 3724\sum a^{15}b^2c$ $+ 10640\sum a^{14}b^3c - 23275\sum a^{13}b^4c + 38741\sum a^{12}b^5c - 48469\sum a^{11}b^6c$ $+ 41971\sum a^{10}b^7c - 16815\sum a^9b^8c + 11970\sum a^{14}b^2c^2 - 27930\sum a^{13}b^3c^2$ $+ 54435\sum a^{12}b^4c^2 - 87039\sum a^{11}b^5c^2 + 119681\sum a^{10}b^6c^2 - 142595\sum a^9b^7c^2$ $+ 151335\sum a^8b^8c^2 + 48450\sum a^{12}b^3c^3 - 72675\sum a^{11}b^4c^3 + 79781\sum a^{10}b^5c^3$ $- 66215\sum a^9b^6c^3 + 24225\sum a^8b^7c^3 + 100130\sum a^{10}b^4c^4 - 100130\sum a^9b^5c^4$ $+ 106590\sum a^8b^6c^4 - 96900\sum a^7b^7c^4 + 52326\sum a^8b^5c^5 - 34884\sum a^7b^6c^5$ $+ 81396a^6b^6c^6$

$a_{11} = 23ABC_{11}$	$ \begin{aligned} C_{11} = & \sum a^{18} - 9\sum a^{17}b + 57\sum a^{16}b^2 - 252\sum a^{15}b^3 \\ & + 836\sum a^{14}b^4 - 2156\sum a^{13}b^5 + 4423\sum a^{12}b^6 - 7324\sum a^{11}b^7 \\ & + 9880\sum a^{10}b^8 - 10911\sum a^9b^9 + 39\sum a^{16}bc - 156\sum a^{15}b^2c \\ & + 436\sum a^{14}b^3c - 924\sum a^{13}b^4c + 1490\sum a^{12}b^5c - 1808\sum a^{11}b^6c \\ & + 1524\sum a^{10}b^7c - 601\sum a^9b^8c + 516\sum a^{14}b^2c^2 - 1204\sum a^{13}b^3c^2 \\ & + 2281\sum a^{12}b^4c^2 - 3516\sum a^{11}b^5c^2 + 4610\sum a^{10}b^6c^2 - 5216\sum a^9b^7c^2 \\ & + 5409\sum a^8b^8c^2 + 2176\sum a^{12}b^3c^3 - 3264\sum a^{11}b^4c^3 + 3672\sum a^{10}b^5c^3 \\ & - 3196\sum a^9b^6c^3 + 1224\sum a^8b^7c^3 + 4386\sum a^{10}b^4c^4 - 4386\sum a^9b^5c^4 \\ & + 5049\sum a^8b^6c^4 - 4896\sum a^7b^7c^4 + 1836\sum a^8b^5c^5 - 1224\sum a^7b^6c^5 \\ & + 2856a^6b^6c^6 \end{aligned} $
$a_{12} = 5AB^2C_{12}$	$ \begin{aligned} C_{12} = & 5\sum a^{18} - 45\sum a^{17}b + 300\sum a^{16}b^2 - 1380\sum a^{15}b^3 \\ & + 4746\sum a^{14}b^4 - 12642\sum a^{13}b^5 + 26639\sum a^{12}b^6 - 45018\sum a^{11}b^7 \\ & + 61518\sum a^{10}b^8 - 68241\sum a^9b^9 + 165\sum a^{16}bc - 660\sum a^{15}b^2c \\ & + 1716\sum a^{14}b^3c - 3234\sum a^{13}b^4c + 4512\sum a^{12}b^5c - 4542\sum a^{11}b^6c \\ & + 3054\sum a^{10}b^7c - 1011\sum a^9b^8c + 2376\sum a^{14}b^2c^2 - 5544\sum a^{13}b^3c^2 \\ & + 9741\sum a^{12}b^4c^2 - 13446\sum a^{11}b^5c^2 + 14292\sum a^{10}b^6c^2 - 11226\sum a^9b^7c^2 \\ & + 9099\sum a^8b^8c^2 + 11036\sum a^{12}b^3c^3 - 16554\sum a^{11}b^4c^3 + 20718\sum a^{10}b^5c^3 \\ & - 21446\sum a^9b^6c^3 + 9414\sum a^8b^7c^3 + 19626\sum a^{10}b^4c^4 - 19626\sum a^9b^5c^4 \\ & + 31779\sum a^8b^6c^4 - 37656\sum a^7b^7c^4 - 2808\sum a^8b^5c^5 + 1872\sum a^7b^6c^5 \\ & - 4368a^6b^6c^6 \end{aligned} $

(参考)

$a_0 = 0$	
$a_{-1} = -\frac{B}{A}$	
$a_{-2} = -\frac{C_{-2}}{A^3}$	$ \begin{aligned} C_{-2} = & \sum a^6 - 3\sum a^5b + 3\sum a^4b^2 - \sum a^3b^3 \\ & + 9\sum a^4bc - 9\sum a^3b^2c + 27a^2b^2c^2 \end{aligned} $
$a_{-3} = -\frac{B^2C_{-3}}{A^5}$	$ \begin{aligned} C_{-3} = & \sum a^6 - 3\sum a^5b + \sum a^4b^2 + 3\sum a^3b^3 \\ & + 13\sum a^4bc - 13\sum a^3b^2c + 39a^2b^2c^2 \end{aligned} $
$a_{-4} = -\frac{BC_{-4}}{A^7}$	$ \begin{aligned} C_{-4} = & \sum a^{12} - 6\sum a^{11}b + 14\sum a^{10}b^2 - 15\sum a^9b^3 \\ & + 6\sum a^8b^4 + \sum a^6b^6 + 38\sum a^{10}bc - 95\sum a^9b^2c \\ & + 111\sum a^8b^3c - 41\sum a^7b^4c - \sum a^6b^5c + 261\sum a^8b^2c^2 \\ & - 348\sum a^7b^3c^2 + 183\sum a^6b^4c^2 + 36\sum a^5b^5c^2 + 568\sum a^6b^3c^3 \\ & - 426\sum a^5b^4c^3 + 1065a^4b^4c^4 \end{aligned} $

(2010/5/6)