

■ $(a+b+c)^{2n+1} - (a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1})$ の因数分解

$F_n(a) = (a+b+c)^{2n+1} - (a^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1})$ とおく。

$F_n(-b) = (-b+b+c)^{2n+1} - \{(-b)^{2n+1} + b^{2n+1} + c^{2n+1}\} = 0$ より $F_n(a)$ は $a+b$ を因数にもつ。

また, $F_n(a)$ は a, b, c についての対称式であるから, 同様に, $b+c, c+a$ も $F_n(a)$ の因数となる。

よって $F_n(a) = (a+b)(b+c)(c+a)G_n(a)$ と表わされる。

ここで, $G_n(a)$ は a, b, c についての $(2n-2)$ 次の対称式である。

① $n=1$ のとき, $G_1(a)$ は定数。 $G_1(a) = A$ とおく。

$$F_1(a) = (a+b+c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = A(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$F_1(0) = (b+c)^3 - (b^3 + c^3) = Abc(b+c)$$

b^2c の係数を比較して $A=3$

$$\text{よって } (a+b+c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

② $n=2$ のとき, $G_2(a)$ は 2 次の対称式。 $G_2(a) = A\sum a^2 + B\sum ab$ とおく。

ここで, $\sum a^2 = a^2 + b^2 + c^2, \sum ab = ab + bc + ca$ を表わすものとする。

$$F_2(a) = (a+b+c)^5 - (a^5 + b^5 + c^5) = (a+b)(b+c)(c+a)(A\sum a^2 + B\sum ab)$$

$$F_2(0) = (b+c)^5 - (b^5 + c^5) = bc(b+c)\{A(b^2 + c^2) + Bbc\}$$

b^4c の係数を比較して $A=5, C_1=5 \quad \cdots \textcircled{1}$

b^3c^2 の係数を比較して $A+B=5, C_2=10 \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ②を連立させて解くと

$$\therefore A=5, B=5$$

$$\text{よって } (a+b+c)^5 - (a^5 + b^5 + c^5) = 5(a+b)(b+c)(c+a)(\sum a^2 + \sum ab)$$

③ $n=3$ のとき, $G_3(a)$ は 4 次の対称式。

$$G_3(a) = A\sum a^4 + B\sum a^3b + C\sum a^2b^2 + D\sum a^2bc \text{ とおく。}$$

$$\begin{aligned} F_3(a) &= (a+b+c)^7 - (a^7 + b^7 + c^7) \\ &= (a+b)(b+c)(c+a)(A\sum a^4 + B\sum a^3b + C\sum a^2b^2 + D\sum a^2bc) \end{aligned}$$

$$F_3(0) = (b+c)^7 - (b^7 + c^7) = bc(b+c)\{A(b^4 + c^4) + B(b^3c + bc^3) + Cb^2c^2\}$$

b^6c の係数を比較して $A=7, C_1=7 \quad \cdots \textcircled{1}$

b^5c^2 の係数を比較して $A+B=7, C_2=21 \quad \cdots \textcircled{2}$

b^4c^3 の係数を比較して $B+C=7, C_3=35 \quad \cdots \textcircled{3}$

①, ②, ③を連立させて解くと

$$\therefore A=7, B=14, C=21$$

このとき

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^7 - (a^7 + b^7 + c^7) \\ &= (a+b)(b+c)(c+a) \left(7\sum a^4 + 14\sum a^3b + 21\sum a^2b^2 + D\sum a^2bc \right) \end{aligned}$$

$$a=b=c=1 \text{ とおくと } 3^7 - 3 = 8(7 \cdot 3 + 14 \cdot 6 + 21 \cdot 3 + 3D)$$

$$\therefore D=35$$

よって

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^7 - (a^7 + b^7 + c^7) \\ &= 7(a+b)(b+c)(c+a) \left(\sum a^4 + 2\sum a^3b + 3\sum a^2b^2 + 5\sum a^2bc \right) \end{aligned}$$

□ $n=4$ のとき, $G_4(a)$ は 6 次の対称式。

$$\begin{aligned} G_4(a) &= A\sum a^6 + B\sum a^5b + C\sum a^4b^2 \\ &+ D\sum a^4bc + E\sum a^3b^3 + F\sum a^3b^2c + Ga^2b^2c^2 \end{aligned}$$

とおく。

$$\begin{aligned} F_4(a) &= (a+b+c)^9 - (a^9 + b^9 + c^9) \\ &= (a+b)(b+c)(c+a) \left(A\sum a^6 + B\sum a^5b \right. \quad \cdots \star \\ &\quad \left. + C\sum a^4b^2 + D\sum a^4bc + E\sum a^3b^3 + F\sum a^3b^2c + Ga^2b^2c^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4(0) &= (b+c)^9 - (b^9 + c^9) \\ &= bc(b+c) \{ A(a^6 + b^6) + B(b^5c + bc^5) + C(b^4c^2 + b^2c^4) + Eb^3c^3 \} \end{aligned}$$

$$b^8c \text{ の係数を比較して } A = {}_9C_1 = 9 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$b^7c^2 \text{ の係数を比較して } A + B = {}_9C_2 = 36 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$b^6c^3 \text{ の係数を比較して } B + C = {}_9C_3 = 84 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$b^5c^4 \text{ の係数を比較して } C + E = {}_9C_4 = 126 \quad \cdots \textcircled{4}$$

①, ②, ③, ④を連立させて解くと

$$\therefore A=9, B=27, C=57, E=69$$

このとき, $\star$ で $b=c=1$ とおくと

$$\begin{aligned} & (a+2)^9 - (a^9 + 2) = 2(a+1)^2 \\ & \times \{ 9(a^6 + 2) + 27(2a^5 + 2a + 2) + 57(2a^4 + 2a^2 + 2) + D(a^4 + 2a) \\ & + 69(2a^3 + 1) + F(2a^3 + 2a^2 + 2a) + Ga^2 \} \end{aligned}$$

$$a=1 \text{ を代入すると } 3D + 6F + G = 1722 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$a=-2 \text{ を代入すると } 3D - 3F + G = 21 \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$a=2 \text{ を代入すると } 5D + 7F + G = 2121 \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{5}, \textcircled{6}, \textcircled{7} \text{ を連立させて解くと } D=105, F=189, G=273$$

よって

$$\begin{aligned}
& (a+b+c)^9 - (a^9 + b^9 + c^9) \\
&= 3(a+b)(b+c)(c+a)(3\sum a^6 + 9\sum a^5b + 19\sum a^4b^2 \\
&+ 35\sum a^4bc + 23\sum a^3b^3 + 63\sum a^3b^2c + 91a^2b^2c^2)
\end{aligned}$$

5 $n=5$ のとき, $G_5(a)$ は 8 次の対称式。

$$\begin{aligned}
G_5(a) &= A\sum a^8 + B\sum a^7b + C\sum a^6b^2 + D\sum a^6bc + E\sum a^5b^3 + F\sum a^5b^2c \\
&+ G\sum a^4b^4 + H\sum a^4b^3c + I\sum a^4b^2c^2 + J\sum a^3b^3c^2
\end{aligned}$$

とおく。

$$\begin{aligned}
& (a+b+c)^{11} - (a^{11} + b^{11} + c^{11}) \\
&= (a+b)(b+c)(c+a)(A\sum a^8 + B\sum a^7b + C\sum a^6b^2 \\
&+ D\sum a^6bc + E\sum a^5b^3 + F\sum a^5b^2c + G\sum a^4b^4 \\
&+ H\sum a^4b^3c + I\sum a^4b^2c^2 + J\sum a^3b^3c^2)
\end{aligned}$$

$a=0$ を代入すると

$$\begin{aligned}
& (b+c)^{11} - (b^{11} + c^{11}) \\
&= bc(b+c)\{A(b^8 + c^8) + B(b^7c + bc^7) + C(b^6c^2 + b^2c^6) + E(b^5c^3 + b^3c^5) + Gb^4c^4\}
\end{aligned}$$

両辺の係数を比較すると

$$A = C_1 = 11,$$

$$A + B = C_2 = 55,$$

$$B + C = C_3 = 165,$$

$$C + E = C_4 = 330,$$

$$E + G = C_5 = 462$$

より

$$\therefore A=11, B=44, C=121, E=209, G=253$$

$$\begin{aligned}
& (a+b+c)^{11} - (a^{11} + b^{11} + c^{11}) \\
&= (a+b)(b+c)(c+a)(11\sum a^8 + 44\sum a^7b + 121\sum a^6b^2 + D\sum a^6bc \\
&+ 209\sum a^5b^3 + F\sum a^5b^2c + 253\sum a^4b^4 + H\sum a^4b^3c + I\sum a^4b^2c^2 + J\sum a^3b^3c^2)
\end{aligned}$$

ここで $b=c=1$ とおくと

$$\begin{aligned}
& (a+2)^{11} - (a^{11} + 2) \\
&= 2(a+1)^2\{11(a^8 + 2) + 44(2a^7 + 2a + 2) + 121(2a^6 + 2a^2 + 2) \\
&+ D(a^6 + 2a) + 209(2a^5 + 2a^3 + 2) + F(2a^5 + 2a^2 + 2a) \\
&+ 253(2a^4 + 1) + H(2a^4 + 2a^3 + 2a) + I(a^4 + 2a^2) + J(2a^3 + a^2)\}
\end{aligned}$$

$$a=1 \text{ を代入 } D+2F+2H+I+J=6369 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a=-2 \text{ を代入 } 5D-5F+H+2I-J=66 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$a=2 \text{ を代入 } 17D+19F+13H+6I+5J=44088 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$a=-3 \text{ を代入 } 241D-158F+34H+33I-15J=11649 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$a=3 \text{ を代入 } 1022D-506F+94H+72I-28J=70818 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より } 2D-F+H+I=2145 \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{1} \times 5 \text{ より } 12D+9F+3H+I=12243 \quad \cdots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{4} + \textcircled{1} \times 15 \text{ より } 16D-8F+4H+3I=6699 \quad \cdots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{5} + \textcircled{1} \times 28 \text{ より } 21D-9F+3H+2I=4983 \quad \cdots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{7} - \textcircled{6} \text{ より } 5D+5F+H=5049 \quad \cdots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{8}-\textcircled{6}\times 3 \text{ より } 10D-5F+H=264 \quad \cdots\textcircled{11}$$

$$\textcircled{9}-\textcircled{6}\times 2 \text{ より } 17D-7F+H=693 \quad \cdots\textcircled{12}$$

$$\textcircled{11}-\textcircled{10} \text{ より } D-2F=-957 \quad \cdots\textcircled{13}$$

$$\textcircled{12}-\textcircled{11} \text{ より } 7D-2F=429 \quad \cdots\textcircled{14}$$

$$\textcircled{14}-\textcircled{13} \text{ より } D=231, F=594, H=924, I=1353, J=1749$$

よって

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^{11}-(a^{11}+b^{11}+c^{11}) \\ &=11(a+b)(b+c)(c+a)\left(\sum a^8+4\sum a^7b+11\sum a^6b^2+21\sum a^6bc+19\sum a^5b^3\right. \\ & \quad \left.+54\sum a^5b^2c+23\sum a^4b^4+84\sum a^4b^3c+123\sum a^4b^2c^2+159\sum a^3b^3c^2\right) \end{aligned}$$

(2010/5/7)