$$x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + a^{2n}$$

$$= \left(x^2 - 2ax \cos \theta + a^2\right) \left\{x^2 - 2ax \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) + a^2\right\} \cdots \left\{x^2 - 2ax \cos \left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + a^2\right\}$$

を証明せよ。

(証) いま, $x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + a^{2n} = 0$ とおくと

$$x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + a^{2n} (\cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta) = 0$$

$$(x^n - a^n \cos n\theta)^2 + a^{2n} \sin^2 n\theta = 0$$

$$(x^n - a^n \cos n\theta)^2 = -a^{2n} \sin^2 n\theta$$

$$x^n - a^n \cos n\theta = \pm i a^n \sin n\theta$$

$$x^n = a^n (\cos n\theta \pm i \sin n\theta)$$

$$= a^n \{\cos(n\theta + 2k\pi) \pm i \sin(n\theta + 2k\pi)\}$$

$$x = a \left\{ \cos \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right) \pm i \sin \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right) \right\}$$

但し, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$$x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + a^{2n}$$

$$= (x - a \cos \theta - i a \sin \theta)(x - a \cos \theta + i a \sin \theta)$$

$$\times \left\{ x - a \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{n} \right) - i a \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{n} \right) \right\} \left\{ x - a \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{n} \right) + i a \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{n} \right) \right\}$$

$$\times \left\{ x - a \cos \left(\theta + \frac{2 \cdot 2\pi}{n} \right) - i a \sin \left(\theta + \frac{2 \cdot 2\pi}{n} \right) \right\} \left\{ x - a \cos \left(\theta + \frac{2 \cdot 2\pi}{n} \right) + i a \sin \left(\theta + \frac{2 \cdot 2\pi}{n} \right) \right\}$$

$$\cdots$$

$$\times \left\{ x - a \cos \left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) - i a \sin \left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) \right\} \left\{ x - a \cos \left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) + i a \sin \left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) \right\}$$

ここで

$$\left\{ x - a \cos \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right) - i a \sin \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right) \right\} \left\{ x - a \cos \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right) + i a \sin \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right) \right\}$$

$$= \left\{ x - a \cos \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right) \right\}^2 + a^2 \sin^2 \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right)$$

$$= x^2 - 2ax \cos \left(\theta + \frac{2k\pi}{n} \right) + a^2$$

であるから

$$x^{2n} - 2a^n x^n \cos n\theta + a^{2n}$$

$$= \left(x^2 - 2ax \cos \theta + a^2\right) \left\{x^2 - 2ax \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right) + a^2\right\} \cdots \left\{x^2 - 2ax \cos \left(\theta + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + a^2\right\} \quad (\text{終証})$$

【例 1】 $x^{10} + \sqrt{3}x^5 + 1$ を実係数の範囲で因数分解せよ。

$$(解) \quad x^{10} + \sqrt{3}x^5 + 1 = x^{10} - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x^5 + 1 = x^{10} - 2x^5 \cos \frac{5\pi}{6} + 1$$

であるから、 $n = 5, a = 1, \theta = \frac{\pi}{6}$ の場合である。

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2(k-1)\pi}{5} = \frac{(12k-7)\pi}{30} \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} & x^{10} + \sqrt{3}x^5 + 1 \\ &= \prod_{k=1}^5 \left\{ x^2 - 2x \cos \frac{(12k-7)\pi}{30} + 1 \right\} \\ &= \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{6} + 1 \right) \left(x^2 - 2x \cos \frac{17\pi}{30} + 1 \right) \left(x^2 - 2x \cos \frac{29\pi}{30} + 1 \right) \left(x^2 - 2x \cos \frac{41\pi}{30} + 1 \right) \left(x^2 - 2x \cos \frac{53\pi}{30} + 1 \right) \end{aligned}$$

【例 2】 $x^{20} + x^{10} + 1$ を実係数の範囲で因数分解せよ。

$$(解) \quad x^{20} + x^{10} + 1 = x^{20} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{10} + 1 = x^{20} - 2x^{10} \cos \frac{2\pi}{3} + 1 = x^{20} - 2x^{10} \cos 10 \cdot \frac{\pi}{15} + 1$$

であるから、 $n = 10, a = 1, \theta = \frac{\pi}{15}$ の場合である。

$$\frac{\pi}{15} + \frac{2(k-1)\pi}{10} = \frac{(3k-2)\pi}{15} \quad \text{であるから}$$

$$x^{20} + x^{10} + 1 = \prod_{k=1}^{10} \left\{ x^2 - 2x \cos \frac{(3k-2)\pi}{15} + 1 \right\}$$

(2011/4/23 時岡)

【例 3】 $x^{30} + \sqrt{2}x^{15} + 1$ を実係数の範囲で因数分解せよ。

$$(解) \quad x^{30} + \sqrt{2}x^{15} + 1 = x^{30} - 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x^{15} + 1 = x^{30} - 2x^{15} \cos \frac{3\pi}{4} + 1 = x^{30} - 2x^{15} \cos 15 \cdot \frac{\pi}{20} + 1$$

であるから、 $n = 15, a = 1, \theta = \frac{\pi}{20}$ の場合である。

$$\frac{\pi}{20} + \frac{2(k-1)\pi}{15} = \frac{(8k-5)\pi}{60} \quad \text{であるから}$$

$$x^{30} + \sqrt{2}x^{15} + 1 = \prod_{k=1}^{15} \left\{ x^2 - 2x \cos \frac{(8k-5)\pi}{60} + 1 \right\}$$

【例 4】 $x^{14} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}x^7 + 1$ を実係数の範囲で因数分解せよ。

$$(解) \quad x^{14} + \sqrt{2 + \sqrt{2}}x^7 + 1 = x^{14} - 2\left(-\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\right)x^7 + 1 = x^{14} - 2x^7 \cos \frac{7\pi}{8} + 1$$

であるから、 $n = 7, a = 1, \theta = \frac{\pi}{8}$ の場合である。

$$\frac{\pi}{8} + \frac{2(k-1)\pi}{7} = \frac{(16k-9)\pi}{56} \text{ であるから}$$

$$x^{14} + \sqrt{2+\sqrt{2}}x^7 + 1 = \prod_{k=1}^7 \left\{ x^2 - 2x \cos \frac{(16k-9)\pi}{56} + 1 \right\}$$

(2011/4/24 時岡)