■ 互いに外接する 3 つの円に外接及び内接する円などについて

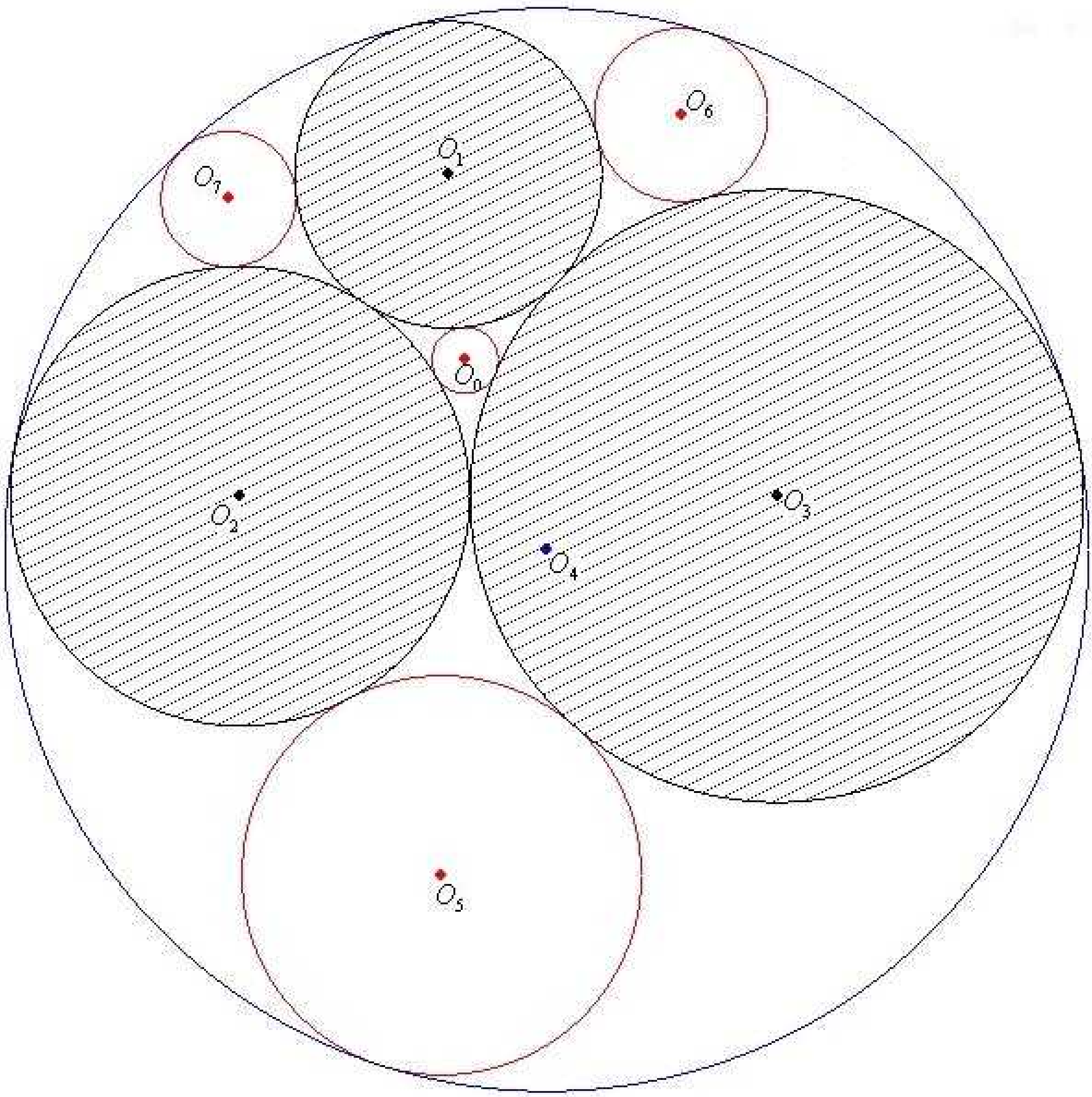
立命館慶祥中学校・高等学校　時岡郁夫

互いに外接している 3 つの円が与えられている。円の中心をO_1, O_2, O_3，半径をr_1, r_2, r_3とする。

また, 3 つの円のすべてと外接する円の中心をO_0, 半径をr_0, 3 つの円のすべてと内接する円の中心をO_4，半径をr_4とする。

さらに，円O_2, O_3に外接し，円O_4に内接する円のうち，円O_1と異なる円の中心をO_5，半径をr_5とし，同様に，円O_1, O_3に外接し，円O_4に内接する円のうち，円O_2と異なる円の中心をO_6，半径をr_6，円O_1, O_2に外接し，円O_4に内接する円うち，円O_3と異なる円の中心をO_7，半径をr_7とする。

このとき，各円の半径r_0, r_4, r_5, r_6, r_7の求め方を考える。



（解）問題を次のとおり整理し，順に考える。

(1)　円の中心 O_0，半径 r_0

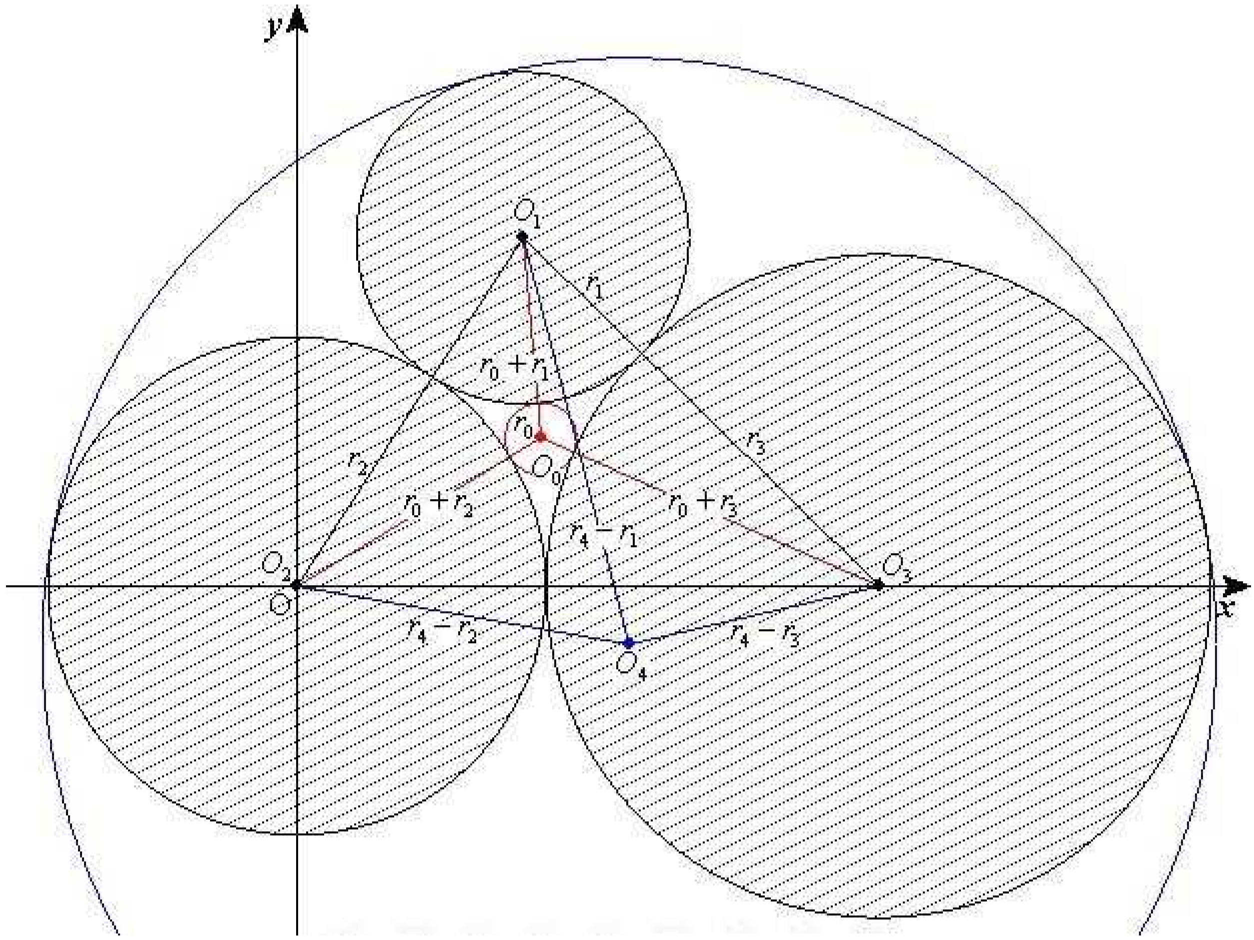
(2)　円の中心 O_4，半径 r_4

(3)　円の中心 O_5，半径 r_5

(4)　円の中心 O_6，半径 r_6

(5)　円の中心 O_7，半径 r_7

座標平面で考える。



$\angle O_1O_2O_3 = \theta$ とおくと，与えられた 3 つの円の中心の座標は,

$O_1((r_1+r_2)\cos\theta, (r_1+r_2)\sin\theta), O_2(0,0), O_3(r_2+r_3, 0)$ とおける。

$\Delta O_1O_2O_3$ について余弦定理より

$$\cos\theta = \frac{(r_1+r_2)^2+(r_2+r_3)^2-(r_3+r_1)^2}{2(r_1+r_2)(r_2+r_3)} = \frac{r_2(r_1+r_2+r_3)-r_3r_1}{(r_1+r_2)(r_2+r_3)}$$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{(r_1+r_2)(r_2+r_3)}$$

よって　$O_1\left(\dfrac{r_2(r_1+r_2+r_3)-r_3r_1}{r_2+r_3}, \dfrac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{r_2+r_3}\right)$となる。

(1)　3つの円のすべてと外接する円の中心を$O_0(x,y)$とする。

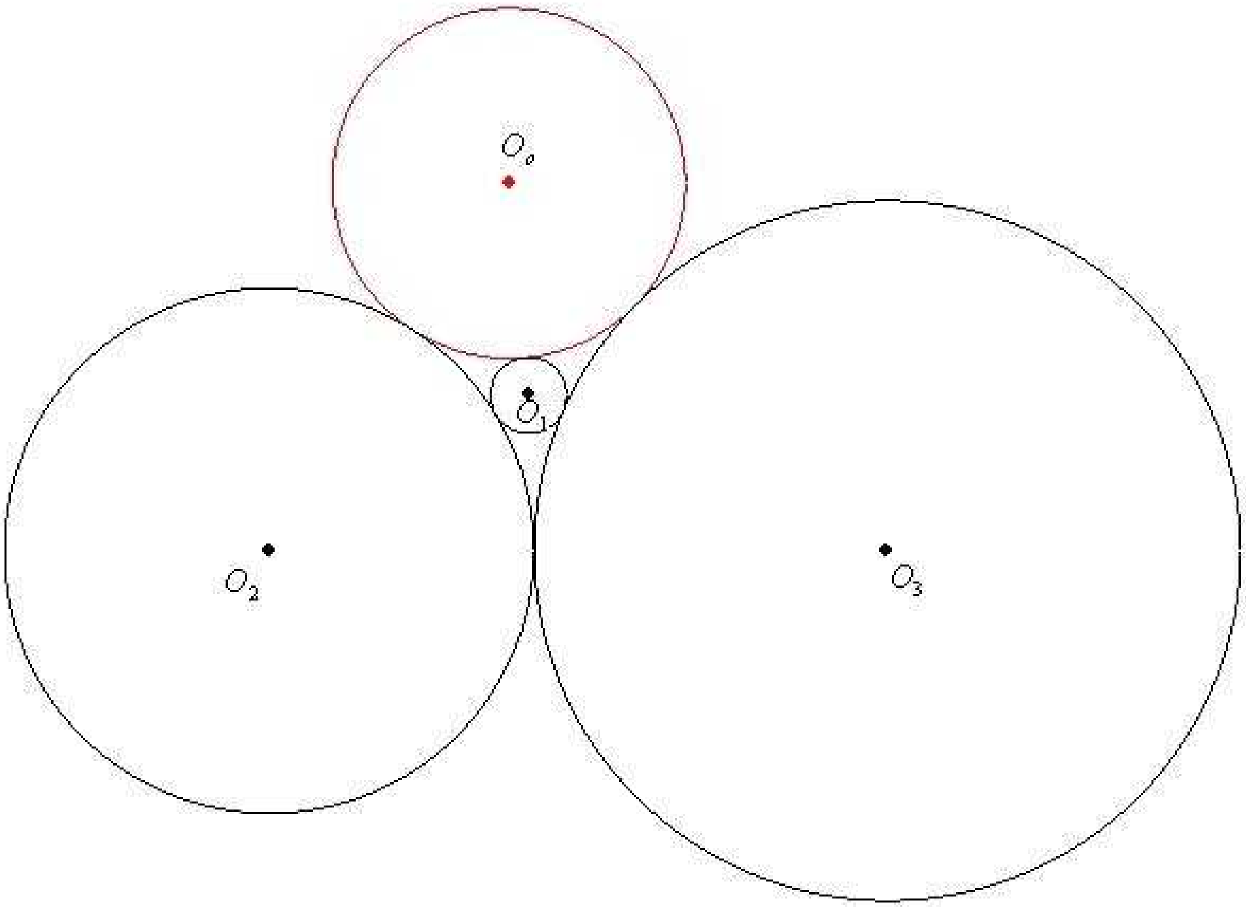
$O_0O_1=r_0+r_1, O_0O_2=r_0+r_2, O_0O_3=r_0+r_3$であるから

$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{r_2(r_1+r_2+r_3)-r_3r_1}{r_2+r_3}\right)^2+\left(y-\dfrac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{r_2+r_3}\right)^2=(r_0+r_1)^2 & \cdots ① \\ x^2+y^2=(r_0+r_2)^2 & \cdots ② \\ (x-r_2-r_3)^2+y^2=(r_0+r_3)^2 & \cdots ③ \end{cases}$$

これらを連立させてx, y, r_0について解けばよい。

まず，③－②よりxをr_0で表す。次に，この式を，①－②の式に代入してyをr_0で表す。最後に，これらを②に代入し，r_0についての2次方程式を解けばよい。$r_0>0$に注意する。

【注意】正のr_0の値が2つ求まる場合がある。この場合，小さい方の値が3つの円O_1, O_2, O_3で囲まれる部分に外接する円で，大きい方の値が図のとおり3つの円O_1, O_2, O_3の外側で外接する円O_0となる。



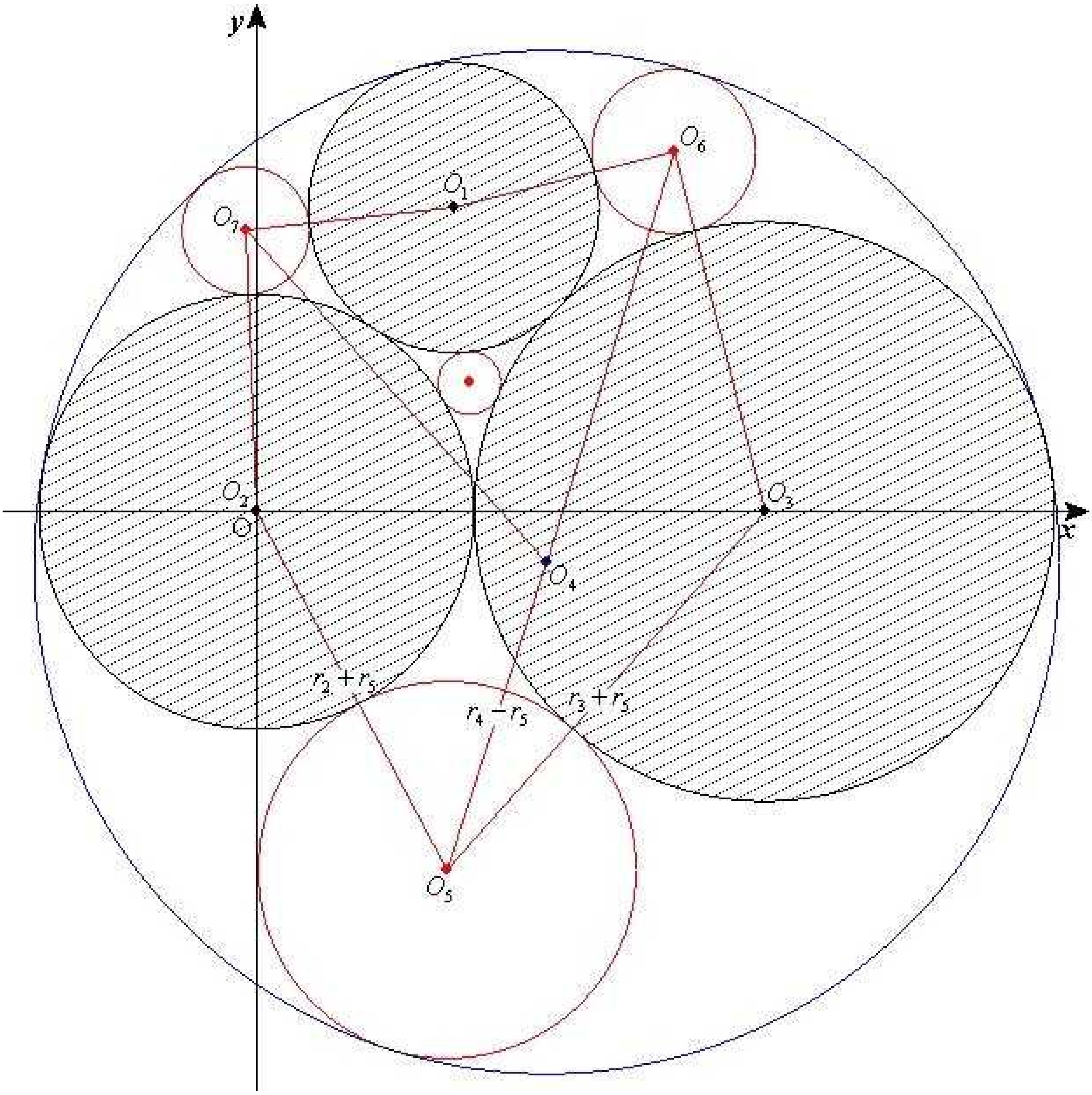
(2)　3 つの円のすべてと内接する円の中心を$O_4(x, y)$とする。

$O_4O_1 = r_4 - r_1, O_4O_2 = r_4 - r_2, O_4O_3 = r_4 - r_3$であるから

$$\begin{cases} \left(x - \dfrac{r_2(r_1 + r_2 + r_3) - r_3 r_1}{r_2 + r_3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}}{r_2 + r_3}\right)^2 = (r_4 - r_1)^2 \\ x^2 + y^2 = (r_4 - r_2)^2 \\ (x - r_2 - r_3)^2 + y^2 = (r_4 - r_3)^2 \end{cases}$$

これらを連立させてx, y, r_4について解けばよい。

(3)



(2)より$O_4(x_4, y_4), r_4$は既知とし，$O_5(x, y)$とおく。

$O_2O_5 = r_2 + r_5$, $O_3O_5 = r_3 + r_5$, $O_4O_5 = r_4 - r_5$ であるから

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (r_2 + r_5)^2 \\ (x - r_2 - r_3)^2 + y^2 = (r_3 + r_5)^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 = (r_4 - r_5)^2 \end{cases}$$

これらを連立させて x, y, r_5 について解けばよい。

(4)　同様に，$O_6(x, y)$ とおく。

$O_1O_6 = r_1 + r_6$, $O_3O_6 = r_3 + r_6$, $O_4O_6 = r_4 - r_6$ であるから，

$$\begin{cases} \left(x - \dfrac{r_2(r_1 + r_2 + r_3) - r_3r_1}{r_2 + r_3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)}}{r_2 + r_3}\right)^2 = (r_1 + r_6)^2 \\ (x - r_2 - r_3)^2 + y^2 = (r_3 + r_6)^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 = (r_4 - r_6)^2 \end{cases}$$

これらを連立させて x, y, r_6 について解けばよい。

(5)　同様に，$O_7(x, y)$ とおく。

$O_1O_7 = r_1 + r_7$, $O_2O_7 = r_2 + r_7$, $O_4O_7 = r_4 - r_7$ であるから，

$$\begin{cases} \left(x - \dfrac{r_2(r_1 + r_2 + r_3) - r_3r_1}{r_2 + r_3}\right)^2 + \left(y - \dfrac{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)}}{r_2 + r_3}\right)^2 = (r_1 + r_7)^2 \\ x^2 + y^2 = (r_2 + r_7)^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 = (r_4 - r_7)^2 \end{cases}$$

これらを連立させて x, y, r_7 について解けばよい。

【類題紹介】

【2004宮崎大】座標平面上の 3 つの円 C_1，C_2，C_3 は，それぞれ中心が $(0,\ 0)$，$(0,\ 3)$，$(4,\ 0)$，半径が r_1，r_2，r_3 であり，どの 2 つの円も互いに外接しているとする．

(1)　r_1，r_2，r_3 の値を求めよ．

(2)　円 C が C_1，C_2，C_3 のすべてと互いに外接しているとき，円 C の半径 r と中心の座標 $(a,\ b)$ を求めよ．

【例題】互いに外接している 3 つの円が与えられている。円の中心をO_1, O_2, O_3，半径を$r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 4$とする。

また，3 つの円のすべてと外接する円の中心をO_0，半径をr_0，3 つの円のすべてと内接する円の中心をO_4，半径をr_4とする。

さらに，円O_2, O_3に外接し，円O_4に内接する円のうち，円O_1と異なる円の中心をO_5，半径をr_5とし，同様に，円O_1, O_3に外接し，円O_4に内接する円のうち，円O_2と異なる円の中心をO_6，半径をr_6，円O_1, O_2に外接し，円O_4に内接する円うち，円O_3と異なる円の中心をO_7，半径をr_7とする。

このとき，各円の半径r_0, r_4, r_5, r_6, r_7を求めよ。

（解）$\angle O_1O_2O_3 = \theta$とおくと，与えられた 3 つの円の中心の座標は，$O_1(5\cos\theta, 5\sin\theta), O_2(0,0), O_3(7,0)$とおける。

$\Delta O_1O_2O_3$について余弦定理より$\cos\theta = \dfrac{5^2 + 7^7 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \dfrac{19}{35}$であるから，$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \dfrac{12\sqrt{6}}{35}$

よって　$O_1\left(\dfrac{19}{7}, \dfrac{12\sqrt{6}}{7}\right)$となる。

(1) 3 つの円のすべてと外接する円の中心を$O_0(x, y)$とする。

$O_0O_1 = r_0 + 2, O_0O_2 = r_0 + 3, O_0O_3 = r_0 + 4$であるから

$$\begin{cases} \left(x - \dfrac{19}{7}\right)^2 + \left(y - \dfrac{12\sqrt{6}}{7}\right)^2 = (r_0 + 2)^2 & \cdots ① \\ x^2 + y^2 = (r_0 + 3)^2 & \cdots ② \\ (x - 7)^2 + y^2 = (r_0 + 4)^2 & \cdots ③ \end{cases}$$

③－②より　$x = \dfrac{21 - r_0}{7} \cdots ④$

①－②より　$\dfrac{19}{7}x + \dfrac{12\sqrt{6}}{7}y = r_0 + 15 \cdots ⑤$

④を⑤に代入して　$y = \dfrac{17r_0 + 84}{21\sqrt{6}} \cdots ⑥$

④，⑥を②に代入すると，

$$\left(\frac{21 - r_0}{7}\right)^2 + \left(\frac{17r_0 + 84}{21\sqrt{6}}\right)^2 = (r_0 + 3)^2$$

$\therefore \quad 47{r_0}^2+312r_0-144=0$

$r_0>0$ より　$r_0=\dfrac{12\left(-13+6\sqrt{6}\right)}{47}$

よって　$O_0\left(\dfrac{9\left(127-8\sqrt{6}\right)}{329},\dfrac{24\left(17+3\sqrt{6}\right)}{329}\right), r_0=\dfrac{12\left(-13+6\sqrt{6}\right)}{47}$

(2) 3 つの円のすべてと内接する円の中心を $O_4(x,y)$ とする。

$O_4O_1=r_4-2, O_4O_2=r_4-3, O_4O_3=r_4-4$ であるから

$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{19}{7}\right)^2+\left(y-\dfrac{12\sqrt{6}}{7}\right)^2=(r_4-2)^2\\ x^2+y^2=(r_4-3)^2\\ (x-7)^2+y^2=(r_4-4)^2\end{cases}$$

これらを連立させて解くと　$r_4=\dfrac{12\left(13+6\sqrt{6}\right)}{47}$

よって　$O_4\left(\dfrac{9\left(127+8\sqrt{6}\right)}{329},\dfrac{24\left(-17+3\sqrt{6}\right)}{329}\right), r_4=\dfrac{12\left(13+6\sqrt{6}\right)}{47}$

(3)　$O_5(x,y)$ とおくと，$O_2O_5=3+r_5$，$O_3O_5=4+r_5$，$O_4O_5=\dfrac{12\left(13+6\sqrt{6}\right)}{47}-r_5$ であるから

$$\begin{cases}x^2+y^2=(3+r_5)^2\\ (x-7)^2+y^2=(4+r_5)^2\\ \left(x-\dfrac{9\left(127+8\sqrt{6}\right)}{329}\right)^2+\left(y-\dfrac{24\left(-17+3\sqrt{6}\right)}{329}\right)^2=\left(\dfrac{12\left(13+6\sqrt{6}\right)}{47}-r_5\right)^2\end{cases}$$

これらを連立させて解くと

$O_5\left(\dfrac{9\left(159-4\sqrt{6}\right)}{511},-\dfrac{12\left(130+33\sqrt{6}\right)}{511}\right), r_5=\dfrac{6\left(17+6\sqrt{6}\right)}{73}$

(4)　同様に　$O_6(x,y)$ とおくと，$O_1O_6=2+r_6$，$O_3O_6=4+r_6$，$O_4O_6=\dfrac{12\left(13+6\sqrt{6}\right)}{47}-r_6$ であるから，

$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{19}{7}\right)^2+\left(y-\dfrac{12\sqrt{6}}{7}\right)^2=(2+r_6)^2\\(x-7)^2+y^2=(4+r_6)^2\\\left(x-\dfrac{9(127+8\sqrt{6})}{329}\right)^2+\left(y-\dfrac{24(-17+3\sqrt{6})}{329}\right)^2=\left(\dfrac{12(13+6\sqrt{6})}{47}-r_6\right)^2\end{cases}$$

これらを連立させて解くと

$$O_6\left(\frac{9(164+17\sqrt{6})}{322},\frac{6(38+39\sqrt{6})}{161}\right), r_6=\frac{3(10+3\sqrt{6})}{46}$$

(5) **同様に** $O_7(x,y)$**とおくと，** $O_1O_7=2+r_7$，$O_2O_7=3+r_7$，$O_4O_7=\dfrac{12(13+6\sqrt{6})}{47}-r_7$**であるから，**

$$\begin{cases}\left(x-\dfrac{19}{7}\right)^2+\left(y-\dfrac{12\sqrt{6}}{7}\right)^2=(2+r_7)^2\\x^2+y^2=(3+r_7)^2\\\left(x-\dfrac{9(127+8\sqrt{6})}{329}\right)^2+\left(y-\dfrac{24(-17+3\sqrt{6})}{329}\right)^2=\left(\dfrac{12(13+6\sqrt{6})}{47}-r_7\right)^2\end{cases}$$

これらを連立させて解くと

$$O_7\left(\frac{9(173-80\sqrt{6})}{1379},\frac{48(131+174\sqrt{6})}{6895}\right), r_7=\frac{12(43+12\sqrt{6})}{985}$$

一般に

$\boxed{1}$ $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1 \leqq 2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$**のとき，3 つの円**$O_1,O_2,O_3$**に外接する円は 1 個だけある。**

$\boxed{2}$ $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1 < 2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$**のとき，3 つの円**$O_1,O_2,O_3$**に外接及び内接する円は 1 個ずつある。** $r_0=\dfrac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1+2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$，$r_4=\dfrac{r_1r_2r_3}{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)+2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$

$\boxed{3}$ $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1 = 2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$**のとき，3 つの円**$O_1,O_2,O_3$**は一直線に外接する。（⑬の例）**

(a) $r_2=r_3$**のとき，**$r_1=\dfrac{r_2}{4}$ (b) $r_2\neq r_3$**のとき，**$r_1=\dfrac{r_2r_3}{\left(\sqrt{r_2}+\sqrt{r_3}\right)^2}$

$\boxed{4}$ $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1 > 2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$**のとき，3 つの円**$O_1,O_2,O_3$**に外接する円は，**$O_0,O_0{}'$ **と 2 個ある。（⑭の例）**

$$r_0=\frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1\pm 2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$$

【参考】以下の具体例でも紹介しているが， n**が 100 以下の自然数で，** $r_1=n,r_2=n+1,r_3=n+2$**であるとき，** r_0**と**r_4**〜**r_7 **の値がすべて有理数になるのは，** $n=1,6,25,96$ **の 4 通りである。**

【円$O_i\left(x_i, y_i\right)$，半径r_iの具体例】

① $r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1$

i	x_i	y_i	r_1
1	1	$\sqrt{3}$	1
2	0	0	1
3	2	0	1
0	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$
4	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$
5	1	$-\frac{24+7\sqrt{3}}{33}$	$\frac{9+4\sqrt{3}}{33}$
6	$\frac{4\left(5+\sqrt{3}\right)}{11}$	$\frac{4\left(3+5\sqrt{3}\right)}{33}$	$\frac{9+4\sqrt{3}}{33}$
7	$\frac{2\left(1-2\sqrt{3}\right)}{11}$	$\frac{4\left(3+5\sqrt{3}\right)}{33}$	$\frac{9+4\sqrt{3}}{33}$

② $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$

i	x_i	y_i	r_1
1	$\frac{9}{5}$	$\frac{12}{5}$	1
2	0	0	2
3	5	0	3
0	$\frac{224}{115}$	$\frac{132}{115}$	$\frac{6}{23}$
4	$\frac{16}{5}$	$-\frac{12}{5}$	6
5	$\frac{7}{5}$	$-\frac{24}{5}$	3
6	$\frac{16}{5}$	$\frac{168}{55}$	$\frac{6}{11}$
7	$\frac{13}{35}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{3}{7}$

③ $r_1=1, r_2=3, r_3=5$

i	x_i	y_i	r_1
1	$\frac{15}{4}$	$\frac{3\sqrt{15}}{4}$	1
2	0	0	3
3	8	0	5
0	$\frac{9(53-10\sqrt{15})}{44}$	$\frac{15(86-21\sqrt{15})}{44}$	$\frac{15(-23+6\sqrt{15})}{11}$
4	$\frac{9(53+10\sqrt{15})}{44}$	$-\frac{15(86+21\sqrt{15})}{44}$	$\frac{15(23+6\sqrt{15})}{11}$
5	$-\frac{9(13+20\sqrt{15})}{196}$	$-\frac{15(212+51\sqrt{15})}{196}$	$-\frac{15(47+12\sqrt{15})}{49}$
6	$\frac{9(1513+40\sqrt{15})}{3769}$	$\frac{15(232+183\sqrt{15})}{3769}$	$\frac{15(77+12\sqrt{15})}{3769}$
7	$\frac{9(1023-80\sqrt{15})}{4729}$	$\frac{15(208+201\sqrt{15})}{4729}$	$\frac{15(83+12\sqrt{15})}{4729}$

④ $r_1=2, r_2=3, r_3=4$

i	x_i	y_i	r_1
1	$\frac{19}{7}$	$\frac{12\sqrt{6}}{7}$	2
2	0	0	3
3	7	0	4
0	$\frac{9(127-8\sqrt{6})}{329}$	$\frac{24(17+3\sqrt{6})}{329}$	$\frac{12(-13+6\sqrt{6})}{47}$
4	$\frac{9(127+8\sqrt{6})}{329}$	$\frac{24(-17+3\sqrt{6})}{329}$	$\frac{12(13+6\sqrt{6})}{47}$
5	$\frac{9(159-4\sqrt{6})}{511}$	$-\frac{12(130+33\sqrt{6})}{511}$	$\frac{6(17+6\sqrt{6})}{73}$
6	$\frac{9(164+17\sqrt{6})}{322}$	$\frac{6(38+39\sqrt{6})}{161}$	$\frac{3(10+3\sqrt{6})}{46}$
7	$\frac{9(173-80\sqrt{6})}{1379}$	$\frac{48(131+174\sqrt{6})}{6895}$	$\frac{12(43+12\sqrt{6})}{985}$

⑤ $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 5$

i	x_i	y_i	r_1
1	$\frac{5}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$	2
2	0	0	3
3	8	0	5
0	$\frac{3\left(633-100\sqrt{3}\right)}{478}$	$\frac{15\left(52+5\sqrt{3}\right)}{478}$	$\frac{30\left(-31+20\sqrt{3}\right)}{239}$
4	$\frac{3\left(633+100\sqrt{3}\right)}{478}$	$\frac{15\left(-52+5\sqrt{3}\right)}{478}$	$\frac{30\left(31+20\sqrt{3}\right)}{239}$
5	$\frac{3\left(2487-200\sqrt{3}\right)}{2882}$	$-\frac{15\left(664+245\sqrt{3}\right)}{2882}$	$\frac{30\left(79+40\sqrt{3}\right)}{1441}$
6	$\frac{3\left(1479+200\sqrt{3}\right)}{1009}$	$\frac{15\left(112+155\sqrt{3}\right)}{1009}$	$\frac{15\left(47+20\sqrt{3}\right)}{1009}$
7	$\frac{3\left(549-400\sqrt{3}\right)}{1609}$	$\frac{15\left(88+185\sqrt{3}\right)}{1609}$	$\frac{15\left(53+20\sqrt{3}\right)}{1609}$

⑥ $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 6$

i	x_i	y_i	r_1
1	$\frac{7}{3}$	$\frac{4\sqrt{11}}{3}$	2
2	0	0	3
3	9	0	6
0	$\frac{9-\sqrt{11}}{2}$	2	$\frac{3\left(-3+\sqrt{11}\right)}{2}$
4	$\frac{9+\sqrt{11}}{2}$	-2	$\frac{3\left(3+\sqrt{11}\right)}{2}$
5	$\frac{117-8\sqrt{11}}{49}$	$-\frac{4\left(46+9\sqrt{11}\right)}{49}$	$\frac{6\left(15+4\sqrt{11}\right)}{49}$
6	$\frac{2\left(78+5\sqrt{11}\right)}{37}$	$\frac{4\left(17+12\sqrt{11}\right)}{37}$	$\frac{3\left(9+2\sqrt{11}\right)}{37}$
7	$\frac{249-104\sqrt{11}}{265}$	$\frac{8\left(5+6\sqrt{11}\right)}{53}$	$\frac{6\left(21+4\sqrt{11}\right)}{265}$

⑦ $r_1 = 3, r_2 = 4, r_3 = 5$

i	x_i	y_i	r_1
1	$\dfrac{11}{3}$	$\dfrac{8\sqrt{5}}{3}$	3
2	0	0	4
3	9	0	5
0	$\dfrac{32\left(281-15\sqrt{5}\right)}{2013}$	$\dfrac{40\left(57+28\sqrt{5}\right)}{2013}$	$\dfrac{60\left(-47+24\sqrt{5}\right)}{671}$
4	$\dfrac{32\left(281+15\sqrt{5}\right)}{2013}$	$\dfrac{40\left(-57+28\sqrt{5}\right)}{2013}$	$\dfrac{60\left(47+24\sqrt{5}\right)}{671}$
5	$\dfrac{872-15\sqrt{5}}{228}$	$-\dfrac{5\left(42+11\sqrt{5}\right)}{57}$	$\dfrac{15\left(8+3\sqrt{5}\right)}{76}$
6	$\dfrac{64\left(2702+345\sqrt{5}\right)}{26787}$	$\dfrac{80\left(633+712\sqrt{5}\right)}{26787}$	$\dfrac{60\left(143+48\sqrt{5}\right)}{8929}$
7	$\dfrac{1399-930\sqrt{5}}{1086}$	$\dfrac{10\left(69+98\sqrt{5}\right)}{543}$	$\dfrac{15\left(19+6\sqrt{5}\right)}{362}$

⑧ $r_1 = 4, r_2 = 5, r_3 = 6$

i	x_i	y_i	r_1
1	$\dfrac{51}{11}$	$\dfrac{60\sqrt{2}}{11}$	4
2	0	0	5
3	11	0	6
0	$\dfrac{25\left(1037-72\sqrt{2}\right)}{4741}$	$\dfrac{60\left(86+105\sqrt{2}\right)}{4741}$	$\dfrac{60\left(-37+30\sqrt{2}\right)}{431}$
4	$\dfrac{25\left(1037+72\sqrt{2}\right)}{4741}$	$\dfrac{60\left(-86+105\sqrt{2}\right)}{4741}$	$\dfrac{60\left(37+30\sqrt{2}\right)}{431}$
5	$\dfrac{5\left(36263-720\sqrt{2}\right)}{37499}$	$-\dfrac{60\left(2732+1095\sqrt{2}\right)}{37499}$	$\dfrac{60\left(103+60\sqrt{2}\right)}{3409}$
6	$\dfrac{25\left(1222+261\sqrt{2}\right)}{3674}$	$\dfrac{30\left(142+255\sqrt{2}\right)}{1837}$	$\dfrac{15\left(28+15\sqrt{2}\right)}{334}$
7	$\dfrac{5\left(5393-6660\sqrt{2}\right)}{18491}$	$\dfrac{120\left(251+555\sqrt{2}\right)}{18491}$	$\dfrac{30\left(59+30\sqrt{2}\right)}{1681}$

⑨ $r_1 = 5, r_2 = 6, r_3 = 7$

i	x_i	y_i	r_1
1	$\frac{73}{13}$	$\frac{12\sqrt{105}}{13}$	5
2	0	0	6
3	13	0	7
0	$\frac{72\left(4289-35\sqrt{105}\right)}{47723}$	$\frac{12\left(4235+966\sqrt{105}\right)}{47723}$	$\frac{210\left(-107+12\sqrt{105}\right)}{3671}$
4	$\frac{72\left(4289+35\sqrt{105}\right)}{47723}$	$\frac{12\left(-4235+966\sqrt{105}\right)}{47723}$	$\frac{210\left(107+12\sqrt{105}\right)}{3671}$
5	$\frac{9\left(64807-140\sqrt{105}\right)}{99853}$	$-\frac{84\left(6035+327\sqrt{105}\right)}{99853}$	$\frac{105\left(151+12\sqrt{105}\right)}{7681}$
6	$\frac{144\left(40238+1225\sqrt{105}\right)}{570037}$	$\frac{168\left(9245+2316\sqrt{105}\right)}{570037}$	$\frac{210\left(323+24\sqrt{105}\right)}{43849}$
7	$\frac{9\left(31707-6020\sqrt{105}\right)}{174733}$	$\frac{84\left(4135+1248\sqrt{105}\right)}{174733}$	$\frac{105\left(169+12\sqrt{105}\right)}{13441}$

⑩ $r_1 = 6, r_2 = 7, r_3 = 8$

i	x_i	y_i	r_1
1	$\frac{33}{5}$	$\frac{56}{5}$	6
2	0	0	7
3	15	0	8
0	$\frac{5439}{785}$	$\frac{3248}{785}$	$\frac{168}{157}$
4	$\frac{441}{55}$	$\frac{112}{55}$	$\frac{168}{11}$
5	$\frac{168}{25}$	$-\frac{224}{25}$	$\frac{21}{5}$
6	$\frac{1029}{65}$	$\frac{56}{5}$	$\frac{42}{13}$
7	$-\frac{609}{305}$	$\frac{2912}{305}$	$\frac{168}{61}$

⑪ $r_1 = 25, r_2 = 26, r_3 = 27$

i	x_i	y_i	r_1
1	$\frac{1353}{53}$	$\frac{2340}{53}$	25
2	0	0	26
3	53	0	27
0	$\frac{6000176}{231451}$	$\frac{3502980}{231451}$	$\frac{17550}{4367}$
4	$\frac{448864}{16589}$	$\frac{217620}{16589}$	$\frac{17550}{313}$
5	$\frac{902083}{35033}$	$-\frac{1038960}{35033}$	$\frac{8775}{661}$
6	$\frac{4653584}{74359}$	$\frac{2850120}{74359}$	$\frac{17550}{1403}$
7	$-\frac{411983}{39167}$	$\frac{1425060}{39167}$	$\frac{8775}{739}$

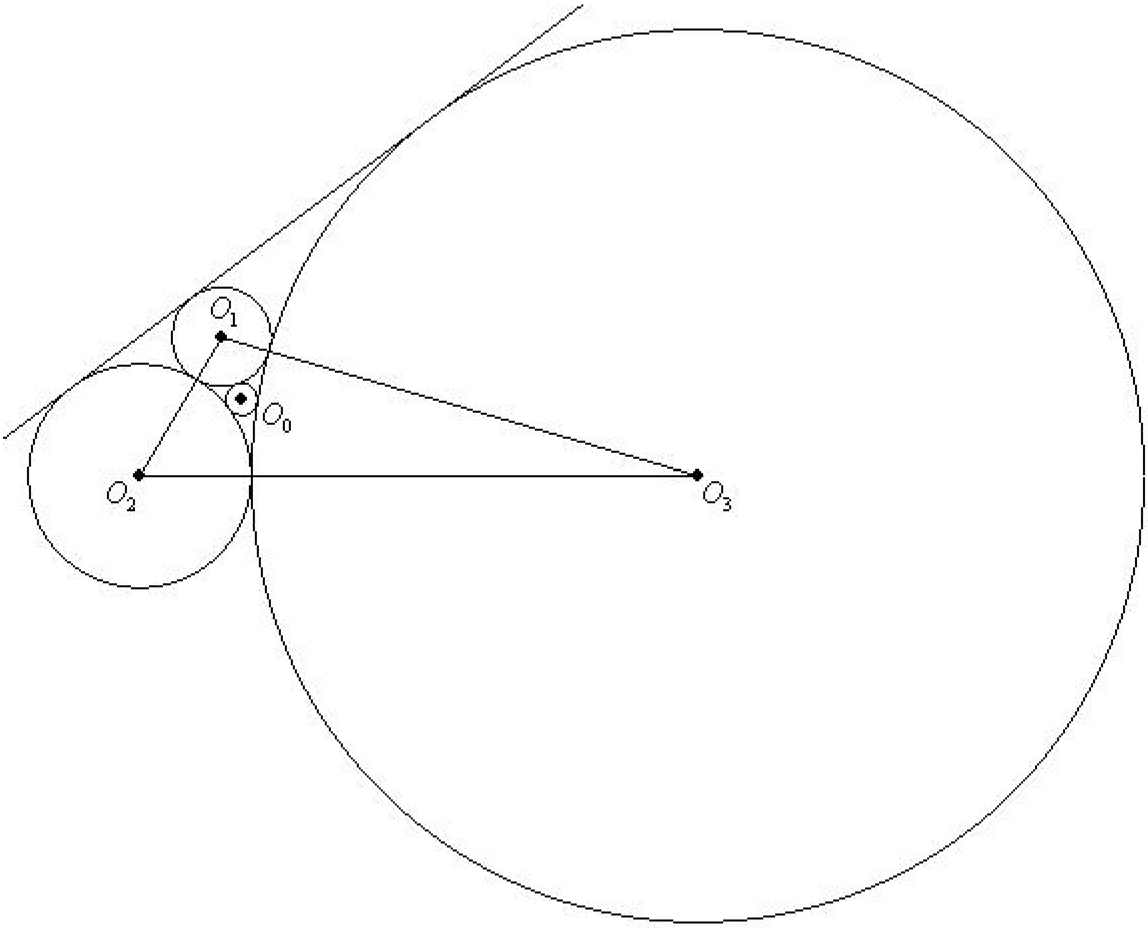
⑫ $r_1 = 96, r_2 = 97, r_3 = 98$

i	x_i	y_i	r_1
1	$\frac{6273}{65}$	$\frac{10864}{65}$	96
2	0	0	97
3	195	0	98
0	$\frac{191576649}{1976585}$	$\frac{110954032}{1976585}$	$\frac{456288}{30409}$
4	$\frac{13915911}{141895}$	$\frac{7680848}{141895}$	$\frac{456288}{2183}$
5	$\frac{60382209}{624065}$	$-\frac{66998286}{624065}$	$\frac{456288}{9601}$
6	$\frac{37457229}{158405}$	$\frac{21977872}{158405}$	$\frac{114072}{2437}$
7	$-\frac{6803871}{160745}$	$\frac{21977872}{160745}$	$\frac{114072}{2473}$

⑬　$r_1 = 4, r_2 = 9, r_3 = 36$（$O_4$～$O_7$ は存在しない。）

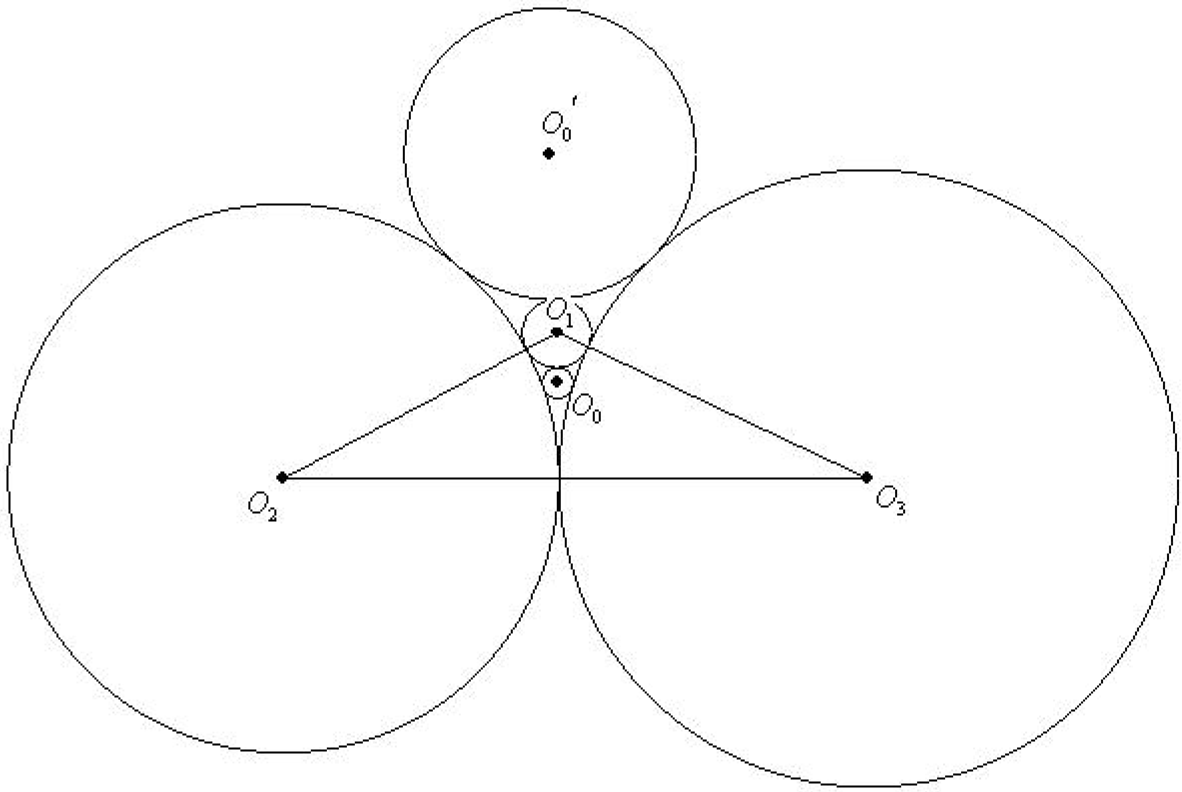
i	x_i	y_i	r_1
1	$\frac{33}{5}$	$\frac{56}{5}$	4
2	0	0	9
3	45	0	36
0	$\frac{288}{35}$	$\frac{216}{35}$	$\frac{9}{7}$

与えられた 3 つの円O_1, O_2, O_3が一直線に外接する場合は，円O_1, O_2, O_3に外接する円は 1 個。

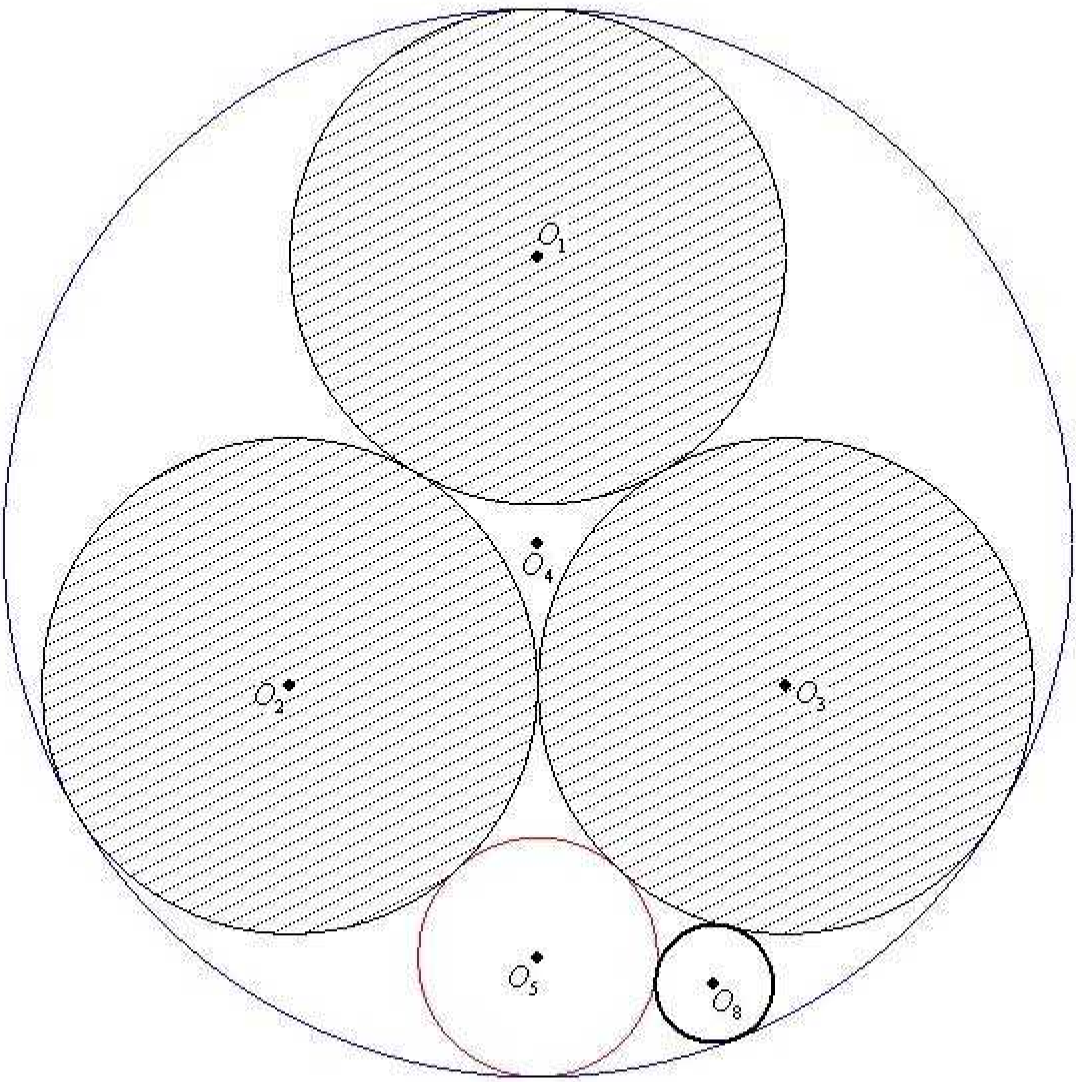


⑭ $r_1 = 1, r_2 = 8, r_3 = 9$（$O_4$ ～ O_7 は存在しない。）

i	x_i	y_i	r_1
1	$\frac{6273}{65}$	$\frac{10864}{65}$	1
2	0	0	8
3	17	0	9
O_0	$\frac{21824}{2737}$	$\frac{7632}{2737}$	$\frac{72}{161}$
$O_0{}'$	$\frac{2240}{289}$	$\frac{2736}{289}$	$\frac{72}{17}$



⑮　（①の追加）$r_1=1, r_2=1, r_3=1$ のとき，O_8 の中心と半径 r_8 について



$O_3(2,0), r_3=1$，$O_5\left(1,-\dfrac{24+7\sqrt{3}}{33}\right), r_5=\dfrac{9+4\sqrt{3}}{33}$，$O_4\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right), r_4=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$ であるから，

$O_8(x,y), r_8=r$ とおくと，$O_3O_8=r+r_3, O_5O_8=r+r_5, O_4O_8=r_4-r$ であるから

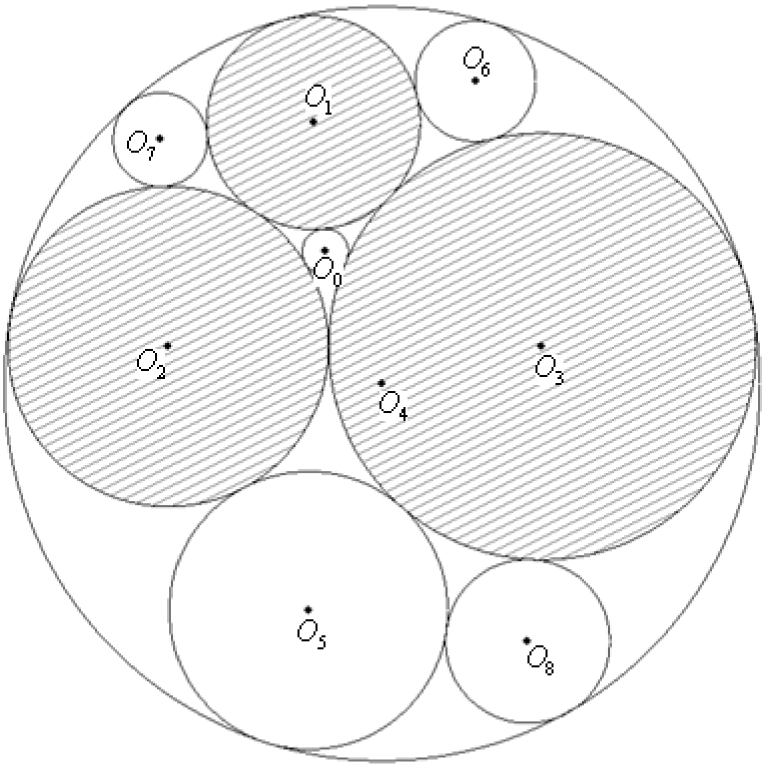
$$\begin{cases} (x-2)^2+y^2=(r+1)^2 \\ (x-1)^2+\left(y+\dfrac{24+7\sqrt{3}}{33}\right)^2=\left(r+\dfrac{9+4\sqrt{5}}{33}\right)^2 \\ (x-1)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}-r\right)^2 \end{cases}$$

これを解くと

$$O_8\left(\frac{4\left(67+9\sqrt{3}\right)}{193},-\frac{4\left(39+11\sqrt{3}\right)}{193}\right), r_8=\frac{25+12\sqrt{3}}{193}$$

（2011/2/15）

⑯　（④の追加）$r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 4$ のとき，O_8 の中心と半径 r_8 について



$O_8(x, y), r_8 = r$ とおくと，$O_3O_8 = r + r_3, O_5O_8 = r + r_5, O_4O_8 = r_4 - r$ であるから

$$\begin{cases} (x-7)^2 + y^2 = (r+4)^2 \\ \left(x - \dfrac{9(159-4\sqrt{6})}{511}\right)^2 + \left(y + \dfrac{12(130+33\sqrt{6})}{511}\right)^2 = \left(r + \dfrac{6(17+6\sqrt{6})}{73}\right)^2 \\ \left(x - \dfrac{9(127+8\sqrt{6})}{329}\right)^2 + \left(y - \dfrac{24(-17+3\sqrt{6})}{329}\right)^2 = \left(\dfrac{12(13+6\sqrt{6})}{73} - r\right)^2 \end{cases}$$

これを解くと

$$O_8\left(\frac{346+51\sqrt{6}}{70}, -\frac{6(4+\sqrt{6})}{7}\right), r_8 = \frac{8+3\sqrt{6}}{10} = 1.5348469$$

（2011/2/23）

⑰　$r_1 = n, r_2 = n+1, r_3 = n+2$ のとき，O_0 の中心 $\left(x_0, y_0\right)$，半径 r_0，O_4 の中心 $\left(x_4, y_4\right)$，半径 r_4 について

$$x_0 = \frac{2(n+1)^2\left\{3n^4+5n^3+21n^2+4n-6-n(n+2)\sqrt{3n(n+2)}\right\}}{(2n+3)\left(3n^4+12n^3+12n^2-4\right)}$$

$$y_0 = \frac{2(n+1)(n+2)\left\{n\left(3n^2+8n+6\right)+(n+1)\left(n^2-2\right)\sqrt{3n(n+2)}\right\}}{(2n+3)\left(3n^4+12n^3+12n^2-4\right)}$$

$$r_0 = \frac{n(n+1)(n+2)\left\{-\left(3n^2+6n+2\right)+2(n+1)\sqrt{3n(n+2)}\right\}}{3n^4+12n^3+12n^2-4}$$

$$x_4 = \frac{2(n+1)^2\left\{3n^4+5n^3+21n^2+4n-6+n(n+2)\sqrt{3n(n+2)}\right\}}{(2n+3)\left(3n^4+12n^3+12n^2-4\right)}$$

$$y_4 = \frac{2(n+1)(n+2)\left\{-n\left(3n^2+8n+6\right)+(n+1)\left(n^2-2\right)\sqrt{3n(n+2)}\right\}}{(2n+3)\left(3n^4+12n^3+12n^2-4\right)}$$

$$r_4 = \frac{n(n+1)(n+2)\left\{3n^2+6n+2+2(n+1)\sqrt{3n(n+2)}\right\}}{3n^4+12n^3+12n^2-4}$$

（補足）半径 r_0, r_4 が有理数になるためには，$\sqrt{3n(n+2)}$ が有理数になればよい。そのような n の例を示す。

$n=1$ のとき，$r_0 = \dfrac{6}{23}, r_4 = 6$

$n=6$ のとき，$r_0 = \dfrac{168}{157}, r_4 = \dfrac{168}{11}$

$n=25$ のとき，$r_0 = \dfrac{17550}{4367}, r_4 = \dfrac{17550}{313}$

$n=96$ のとき，$r_0 = \dfrac{456288}{30409}, r_4 = \dfrac{456288}{2183}$

$n=361$ のとき，$r_0 = \dfrac{47437566}{847079}, r_4 = \dfrac{47437566}{60817}$

$n=1350$ のとき，$r_0 = \dfrac{1232922600}{5899141}, r_4 = \dfrac{1232922600}{423539}$

$n=5041$ のとき，$r_0 = \dfrac{128176529046}{164328863}, r_4 = \dfrac{128176529046}{11798281}$

$n=18816$ のとき，$r_0 = \dfrac{3331356862848}{11444028971}, r_4 = \dfrac{3331356862848}{82164431}$

（$n = 65535$ まで）

（2011/3/7）