3 次方程式の実数解の表現について

1　はじめに

次の Cardano の公式はよく知られている。

3 次方程式 $x^3+px+q=0$（p,q は実数）・・・①

の解は，$D=-\left\{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3\right\}$ とおくと，

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{-D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{-D}},$$

$$x=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{-D}}+\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{-D}},$$

$$x=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{-D}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{-D}}$$ （ただし，$\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$）

しかし，①が 3 つの実数解をもつとき，次の $\boxed{例1}$ のように，その解の表現は虚数 i を含んだものとなる。そこで，別のアプローチで 3 次方程式の実数解の表現を考えてみる。

$\boxed{例1}$　$x^3-3x+1=0$ の場合

（解）$p=-3,q=1,D=-\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-3}{3}\right)^3\right\}=\dfrac{3}{4}$ であるから，

$$x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\sqrt[3]{\omega}+\sqrt[3]{\omega^2},\quad x=\omega\sqrt[3]{\omega}+\omega^2\sqrt[3]{\omega^2},$$

$$x=\omega^2\sqrt[3]{\omega}+\omega\sqrt[3]{\omega^2}$$ （ただし，$\omega=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$）

※この表現だと，実数解であるかどうかよくわからない。

2　D の値で場合分けをする

(1)　$D>0$ のとき（このとき，$p<0$ である）

①で，$x=r\cos\theta$（$r>0, 0\leqq\theta\leqq\pi$）とおくと，$r^3\cos^3\theta+pr\cos\theta+q=0$・・・②

ここで，$4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos 3\theta$ が適用できるように r を定める。

係数を比較して，$r^3:pr=4:(-3)$

$r>0$ より，$r=\sqrt{-\dfrac{4p}{3}}$

このとき②は，$\cos 3\theta=\dfrac{3q}{pr}\left(\left|\dfrac{3q}{pr}\right|=\sqrt{-\dfrac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{\left(\frac{p}{3}\right)^3}}<1\right)$ となる。

$0<\cos^{-1}\left(\dfrac{3q}{pr}\right)<\pi$ とすれば，$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，

$$\theta=\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{3q}{pr}\right),\frac{2\pi}{3}\pm\frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{3q}{pr}\right)$$

よって，①の実数解は，$x=r\cos\left\{\dfrac{1}{3}\cos^{-1}\left(\dfrac{3q}{pr}\right)\right\},r\cos\left\{\dfrac{2\pi}{3}\pm\dfrac{1}{3}\cos^{-1}\left(\dfrac{3q}{pr}\right)\right\}$ と表される。

$\boxed{\text{例 2}}$ $x^3-3x+1=0$ の場合

（解） $p=-3,q=1,D=-\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-3}{3}\right)^3\right\}=\dfrac{3}{4}>0$ である。

$r=\sqrt{-\dfrac{4p}{3}}=2$，$\theta=\dfrac{1}{3}\cos^{-1}\left(\dfrac{3q}{pr}\right)=\dfrac{1}{3}\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{9}$

求める実数解は

$x=2\cos\dfrac{2\pi}{9},2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\pm\dfrac{2\pi}{9}\right)=2\cos\dfrac{2\pi}{9},2\cos\dfrac{4\pi}{9},2\cos\dfrac{8\pi}{9}\cdots$（答）

※この表現だと，実数解であることが一目瞭然である。

⑵ $D=0$ のとき（このとき，$p\leqq0$ である）

［1］ $p=0$ のとき，$q=0$ となり，①の実数解は $x=0$（3 重解）

［2］ $p<0$ のとき，⑴と同様に $x=r\cos\theta$（$r>0,0\leqq\theta\leqq\pi$）とおくと，

$\cos3\theta=\pm1$ が得られるので，①の実数解は，$x=r,-\dfrac{1}{2}r$（2 重解），または，$x=-r,\dfrac{1}{2}r$（2 重解）である。ただし，$r=\sqrt{-\dfrac{4p}{3}}$ である。

⑶ $D<0$ のとき（このとき，$q\neq0$ である）

［1］ $p<0$ のとき

①で，$x=r\cosh\theta$（r は 0 でない実数，θ は実数，$\cosh\theta=\dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$）とおくと，

$r^3\cosh^3\theta+pr\cosh\theta+q=0\cdots$③

ここで，$4\cosh^3\theta-3\cosh\theta=\cosh3\theta$（注 1）が適用できるように r を定めると，

$r=\pm\sqrt{-\dfrac{4p}{3}}$ となり，このとき③は，$\cosh3\theta=\dfrac{3q}{pr}$ となる。

ところで，$\cosh3\theta=\dfrac{e^{3\theta}+e^{-3\theta}}{2}>0$ であるから，$\dfrac{3q}{pr}>0$ でなければならない。

従って，r を次のように定める。

$$r=\begin{cases}-\sqrt{-\dfrac{4p}{3}}\,(q>0\text{のとき})\\ \sqrt{-\dfrac{4p}{3}}\,(q<0\text{のとき})\end{cases}$$

このとき，$\dfrac{e^{3\theta}+e^{-3\theta}}{2}=\dfrac{3q}{pr}$ より，$e^{3\theta}=\dfrac{3q}{pr}\pm\sqrt{\left(\dfrac{3q}{pr}\right)^2-1}$

$$\therefore\theta=\frac{1}{3}\log\left\{\frac{3q}{pr}\pm\sqrt{\left(\frac{3q}{pr}\right)^2-1}\right\}$$

さて，$-\theta=\dfrac{1}{3}\log\left\{\dfrac{3q}{pr}\mp\sqrt{\left(\dfrac{3q}{pr}\right)^2-1}\right\}$（複号同順）となるので，①の実数解は

$x=r\cosh\left[\dfrac{1}{3}\log\left\{\dfrac{3q}{pr}\pm\sqrt{\left(\dfrac{3q}{pr}\right)^2-1}\right\}\right]$と表される。

ここで，$r=\pm\sqrt{-\dfrac{4p}{3}}$ を代入して計算すると，$x=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{-D}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{-D}}$ となる。

$\boxed{\text{例 3}}$　$x^3-3x-4=0$ の場合

（解）$p=-3, q=-4, D=-\left\{\left(\dfrac{-4}{2}\right)^2+\left(\dfrac{-3}{3}\right)^3\right\}=-3<0$ であるから，

$x=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{-D}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{-D}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\cdots$（答）

［2］$p>0$ のとき

②で，$x=r\sinh\theta$（$r>0$，θ は実数，$\sinh\theta=\dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$）とおくと，

$r^3\sinh^3\theta+pr\sinh\theta+q=0\cdots$④

ここで，$4\sinh^3\theta+3\sinh\theta=\sinh 3\theta$（注 2）が適用できるように r を定めると，

$r=\sqrt{\dfrac{4p}{3}}$ となり，このとき③は，$\sinh 3\theta=-\dfrac{3q}{pr}$ となる。

ところで，$\sinh 3\theta=\dfrac{e^{3\theta}-e^{-3\theta}}{2}=-\dfrac{3q}{pr}$ と $e^{3\theta}>0$ より，$e^{3\theta}=-\dfrac{3q}{pr}+\sqrt{\left(\dfrac{3q}{pr}\right)^2+1}$

$\therefore\theta=\dfrac{1}{3}\log\left\{-\dfrac{3q}{pr}+\sqrt{\left(\dfrac{3q}{pr}\right)^2+1}\right\}$となるので，

①の実数解は，$x = r\sinh\left[\dfrac{1}{3}\log\left\{-\dfrac{3q}{pr}+\sqrt{\left(\dfrac{3q}{pr}\right)^2+1}\right\}\right]$と表される。

ここで，$r=\sqrt{\dfrac{4p}{3}}$を代入して計算すると，$x=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{-D}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{-D}}$となる。

$\boxed{例4}$　$x^3+6x-2=0$の場合

（解）$p=6, q=-2, D=-\left\{\left(\dfrac{-2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{6}{3}\right)^3\right\}=-9<0$であるから，

$x=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{-D}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{-D}}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\cdots$（答）

（注1）$4\cosh^3\theta-3\cosh\theta=\cosh 3\theta$の証明

$$左辺=4\left(\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\right)^3-3\left(\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\right)=4\times\frac{e^{3x}+3e^{x}+3e^{-x}+e^{-3x}}{8}-3\times\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$$

$$=\frac{e^{3\theta}+e^{-3\theta}}{2}=\cosh 3x=右辺$$

（注2）$4\sinh^3\theta+3\sinh\theta=\sinh 3\theta$の証明は，（注1）と同様にできるので省略。

3　終わりに

$x^3-3x+1=0$の解が$x=2\cos\dfrac{2\pi}{9}, 2\cos\dfrac{4\pi}{9}, 2\cos\dfrac{8\pi}{9}$と求められると，例えば，

$y=x^3-3x+1$とx軸によって囲まれた部分の面積も，$\dfrac{9\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{2\pi}{9}$と求められる。

また，$D<0$のときの実数解の表現方法（$\cosh 3\theta$等の利用）からも，Cardano の公式が導かれることは，何かの文献に掲載されているだろうか。

【参考文献】

［1］　問題解法代数学辞典　笹部貞市著　聖文社　昭和45年初版第27刷

2003.7.23（1978.9.23 のノートから）
2016.11.21