

$\triangle ABC$ と点 P について、点 P を BC , CA , AB に関して対称移動した点をそれぞれ D , E , F とするとき、 $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値について

1. はじめに

84. 「 $\triangle ABC$ の外接円に内接する種々の $\triangle DEF$ について、 $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値」の続編である。

種々の点 P について、計算し終わってから、(広義) 垂足三角形の面積の 4 倍であることに気がついた。

$\triangle ABC$ と点 P について、 P から直線 BC , CA , AB に下した垂線の足をそれぞれ L , M , N とする。 P が垂心のとき、 $\triangle LMN$ を垂足三角形といい、 P が垂心以外の点の場合の $\triangle LMN$ を (広義) 垂足三角形という。

後述の(12)にある外心を O 、外接円の半径を R 、 $OP = d$ とすると、 $\frac{\triangle LMN}{\triangle ABC} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2}$ であるから (参考文献) ,

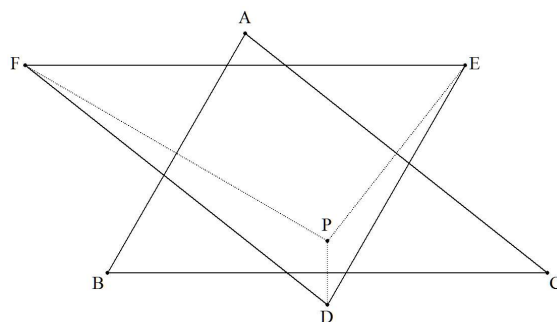
$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{R^2 - d^2}{R^2}$ となる。一見、万能公式のようであるが、五心以外は、 OP を計算するのが大変なので、実際は個々の場合を考えることになる。逆に言うと、このこの公式があるから、五心以外の個々の場合についての計算例が見当たらない。

2. 本題

点 P を $\triangle ABC$ の BC , CA , AB に関して対称移動した点をそれぞれ D , E , F とする。

点 P が次の場合、 $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値をそれぞれ求めよ。

- (1) 外心
- (2) 重心
- (3) 内心
- (4) 垂心
- (5) $\angle A$ 内の傍心
- (6) ジェルゴンヌ (Gergonne) 点 : 三角形の内接円と辺の接点と頂点をつなぐ 3 直線は 1 点で交わる。
- (7) ナーゲル (Nagel) 点 : 三角形の傍接円と辺の接点と頂点をつなぐ 3 直線は 1 点で交わる。
- (8) フェルマー (Fermat) 点 : $\angle BPC = \angle CPA = \angle APB$ (3 つの内角はどれも 120° 未満とする。)
- (9) 第 1 プロカル (Brocard) 点 : $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$
($\angle PAC = \angle PBA = \angle PCB$ の場合、第 2 プロカル点)
- (10) ルモワヌ (Lemoine) 点 : 三角形の角の二等分線に関して中線を折り返した 3 直線は 1 点で交わる。
- (11) キーペルト (Kiepert) 点 : $\triangle ABC$ の外側に各辺を底辺とし、低角 θ の二等辺三角形 $\triangle A'BC$, $\triangle B'CA$, $\triangle C'AB$ をつくと、 AA' , BB' , CC' は一点で交わる。
- (12) P : $OP = d$ となる点 (O : 外心)



3. $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値一覧

R は外接円の半径, r は内接円の半径, r_1 は $\angle A$ 内の傍接円の半径, $s = \frac{a+b+c}{2}$, $S = \triangle ABC$,

(1) (外心) 1 ($\because \triangle DEF \equiv \triangle ABC$)

(2) (重心) $\frac{a^2+b^2+c^2}{9R^2} = \frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}$

(3) (内心) $\frac{2r}{R} = \frac{8(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$

(4) ($\angle A$ 内の傍心) $\frac{2r_1}{R} = \frac{8s(s-b)(s-c)}{abc}$

(5) (垂心) $8\cos A \cos B \cos C = \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2c^2}$

(6) (Gergonne点) $\frac{4(d-3Rr)S^2}{d^2R^2}$, $d = \frac{1}{4}(2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2)$

(7) (Nagel点) $\frac{4(5Rr-d)}{R^2}$, $d = \frac{1}{4}(2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2)$

(8) (Fermat点) $\frac{\sqrt{3}S(f-2a^2)(f-2b^2)(f-2c^2)}{a^2b^2c^2\left(f+\frac{8}{\sqrt{3}}S\right)}$, $f = a^2+b^2+c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S$

(9) (Brocard点) $\frac{(4S)^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$, $(4S)^2 = 2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

(10) (Lemoine点) $\frac{3(4S)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$

(11) (Kiepert点) $\frac{(-a^2+b^2+c^2+d)(a^2-b^2+c^2+d)(a^2+b^2-c^2+d)[(a^2+b^2+c^2)d+(4S)^2]}{R^2\{3d^2+2(a^2+b^2+c^2)d+(4S)^2\}^2}$, $d = \frac{4S}{\tan \theta}$

(12) (O : 外心, $OP = d \leq R$) $\frac{R^2-d^2}{R^2}$

4. 具体例

$\triangle ABC$ について, $a=8, b=7, c=5$ のときの $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値

(1) (外心) 1 , (2) (重心) $\frac{46}{49}$, (3) (内心) $\frac{3}{7}$, (4) ($\angle A$ 内の傍心) $\frac{30}{7}$, (5) (垂心) $\frac{22}{49}$,

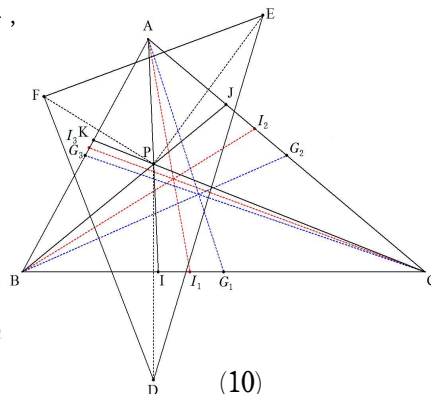
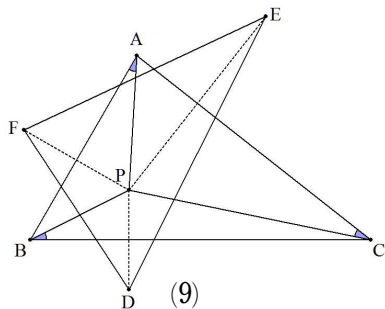
(6) (Gergonne点) $\frac{36000}{47089}$, (7) (Nagel点) $\frac{48}{49}$, (8) (Fermat点) $\frac{1600}{2107}$,

(9) (第1 Brocard点) $\frac{1600}{1987}$,

(10) (Lemoine点) $\frac{400}{529}$,

(11) (Kiepert点, $\theta = 30^\circ$) $\frac{7120}{8281}$,

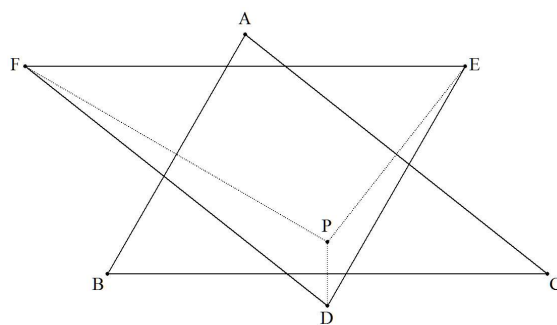
(12) ($OP=2$) $\frac{37}{49}$



問題

1. $\triangle ABC$ の外心 P を BC , CA , AB に関して対称移動した点をそれぞれ D , E , F とする。

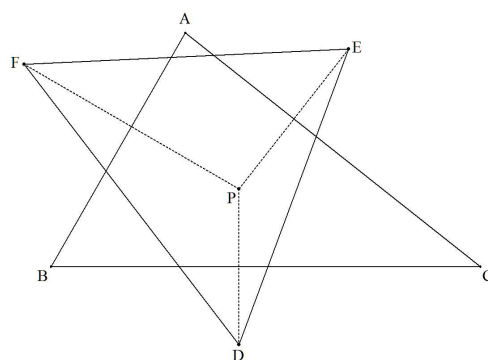
このとき, $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値を求めよ。



2. $\triangle ABC$ の重心 P を BC , CA , AB に関して対称移動した点をそれぞれ D , E , F とする。

このとき, $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9R^2}$ と表されることを証明せよ。

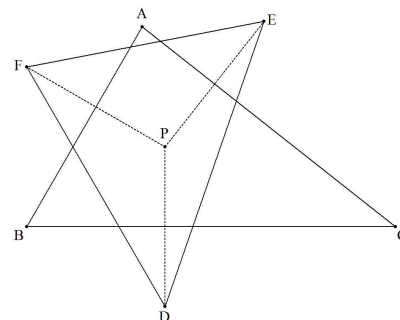
ただし, R は $\triangle ABC$ の外接円の半径とする。



3. $\triangle ABC$ の内心 P を BC , CA , AB に関して対称移動した点をそれぞれ D , E , F とする。

このとき, $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{2r}{R}$ と表されることを証明せよ。

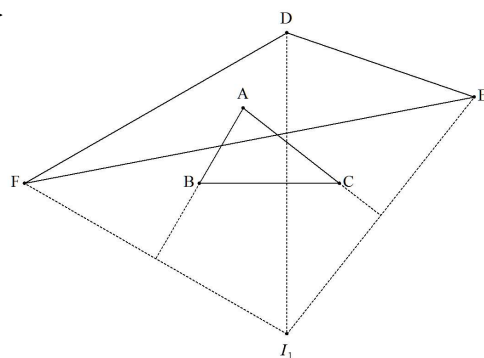
ただし, R , r はそれぞれ $\triangle ABC$ の外接円, 内接円の半径とする。



4. $\triangle ABC$ の $\angle A$ 内の傍心 I_1 を BC , CA , AB に関して対称移動した点をそれぞれ D , E , F とする。

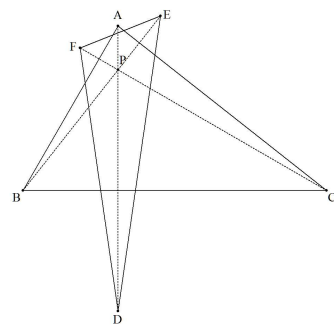
このとき, $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{2r_1}{R}$ と表されることを証明せよ。

ただし, R , r_1 はそれぞれ $\triangle ABC$ の外接円, $\angle A$ 内の傍接円の半径とする。



5. $\triangle ABC$ の垂心 P を BC , CA , AB に関して対称移動した点をそれぞれ D , E , F とする。

このとき, $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 8 \cos A \cos B \cos C$ と表されることを証明せよ。



6. $\triangle ABC$ の内接円と BC , CA , AB の接点をそれぞれ I , J , K とする。
次を証明せよ。

- (1) AI , BJ , CK は 1 点 P で交わる。

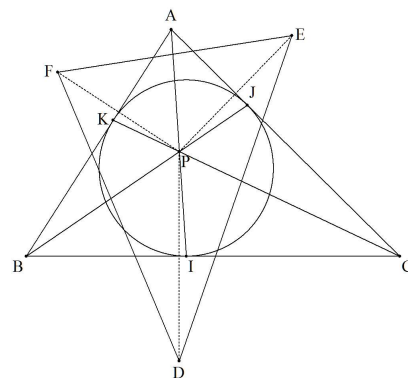
この点を, ジェルゴンヌ (Gergonne) 点という。

- (2) 点 P を BC , CA , AB に関して対称移動した点をそれぞれ D , E , F とする。

このとき, $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{4(d-3rR)S^2}{d^2R^2}$ と表されることを証明せよ。

ただし, $S = \triangle ABC$, r , R は, それぞれ $\triangle ABC$ の内接円, 外接円の半径,

$$d = \frac{2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2}{4} \text{ とする。}$$



7. $\triangle ABC$ の 3 つの傍接円と辺 BC , CA , AB との接点をそれぞれ I , J , K とする。

- (1) AI , BJ , CK は 1 点 P で交わることを証明せよ。

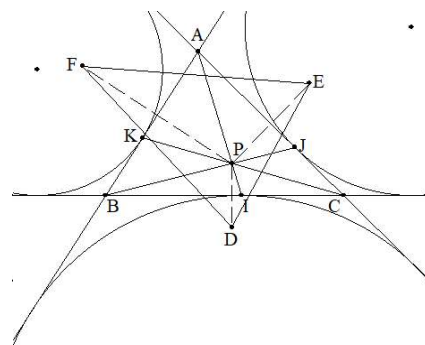
この点を, ナーゲル (Nagel) 点という。

- (2) P を BC , CA , AB に関して対称移動した点をそれぞれ D , E , F とする。

このとき, $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{4(5Rr-d)}{R^2}$ と表されることを証明せよ。

ただし, r , R は, それぞれ $\triangle ABC$ の内接円, 外接円の半径,

$$d = \frac{2bc + 2ca + 2ab - a^2 - b^2 - c^2}{4} \text{ とする。}$$



8. $\triangle ABC$ の外側に各辺を 1 辺にもつ正三角形 $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ をつくる。

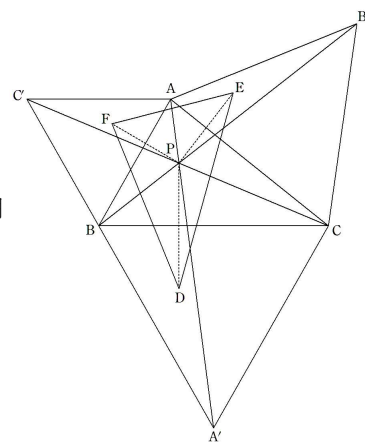
- (1) AA' , BB' , CC' は 1 点 P で交わることを証明せよ。

この点をフェルマー (Fermat) 点という。

- (2) P を BC , CA , AB に関して対称移動した点をそれぞれ D , E , F とする。

このとき, $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}S(f-2a^2)(f-2b^2)(f-2c^2)}{a^2b^2c^2\left(f+\frac{8}{\sqrt{3}}S\right)}$ と表されることを証明

せよ。ただし, $S = \triangle ABC$, $f = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S$ とする。



9. $\triangle ABC$ 内に点 P を $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ となるようにとる。

(1) 点 P を作図で求めよ。

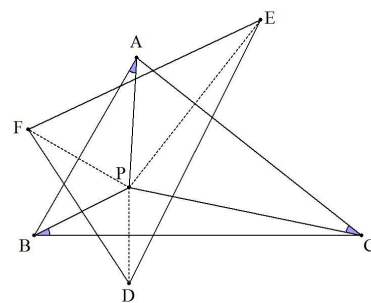
この点を、第1ブロカル (Brocard) 点という。

また、 $\angle PAC = \angle PBA = \angle PCB$ となる点を第2ブロカル点という。

(2) 点 P を BC , CA , AB に関して対称移動した点をそれぞれ D , E , F とする。

このとき、 $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{(4S)^2}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$ と表されることを証明せよ。

ただし、 $S = \triangle ABC$ とする。



10. $\triangle ABC$ の3つの中線 AG_1 , BG_2 , CG_3 をそれぞれ角の二等分線

AI_1 , BI_2 , CI_3 に関して折り返した直線をそれぞれ AI , BJ , CK とする。

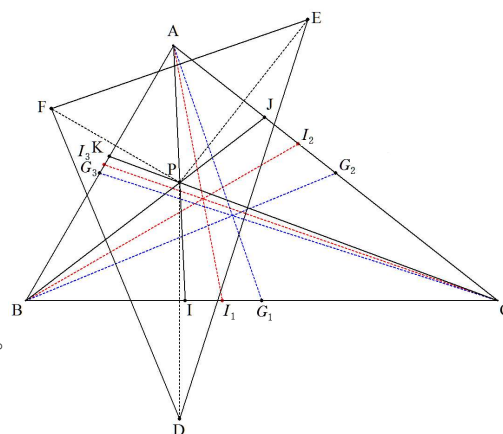
(1) AI , BJ , CK は1点 P で交わることを証明せよ。

この点をルモワヌ (Lemoine) 点あるいは類似重心という。

(2) P を BC , CA , AB に関して対称移動した点をそれぞれ D , E , F とす。

このとき、 $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{3(4S)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$ と表されることを証明せよ。

ただし、 $S = \triangle ABC$ とする。



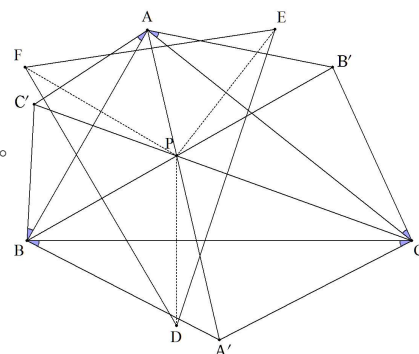
11. $\triangle ABC$ の外側に各辺を底辺とし、低角 θ の二等辺三角形 $\triangle A'BC$, $\triangle B'CA$,

$\triangle C'AB$ をつくる。

(1) AA' , BB' , CC' は1点 P で交わることを証明せよ。この点をキーペルト (Kiepert) 点という。

(2) P を BC , CA , AB に関して対称移動した点をそれぞれ D , E , F とする。

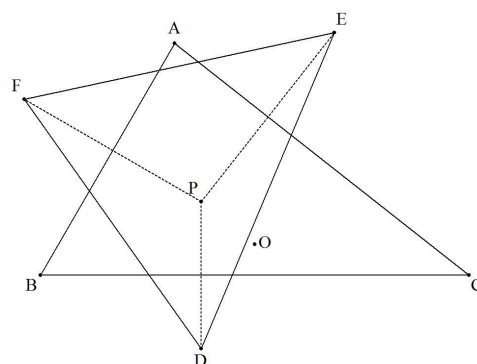
$\triangle ABC = S$, $\frac{4S}{\tan \theta} = d$ とおくと、 $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値を求めよ。



12. $\triangle ABC$ の外心を O とし、点 P を $\triangle ABC$ の外接円の内部の点とする。

点 P を直線 BC , CA , AB に関して対称移動した点を、それぞれ D , E , F とし、 $OP = d$, $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする。

このとき、 $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{R^2 - d^2}{R^2}$ を証明せよ。



1. 解答例

〔解答〕 PD, PE, PF の中点をそれぞれ L, M, N とする。

$\triangle DEF \sim \triangle LMN$ で、相似比は $2:1$ である。

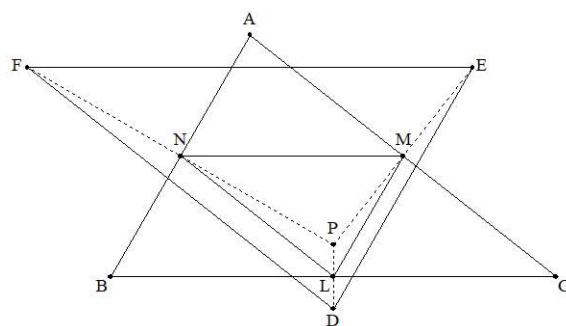
L, M, N はそれぞれ BC, CA, AB の中点でもある。

中点連結定理により、

$\triangle ABC \sim \triangle LMN$ で、相似比は $2:1$ である。

よって、 $\triangle DEF \equiv \triangle ABC$

よって、 $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 1$ 〔答〕



(2019/9/15 時岡)

2. $\triangle ABC = S$ とおく。

A から BC に下した垂線の足を H_1 とすると、 $AH_1 = \frac{2S}{a}$

PD, PE, PF の中点をそれぞれ L, M, N とする。

P は重心であるから、 $PL = \frac{1}{3}AH_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2S}{a} = \frac{2S}{3a}$

同様に、 $PM = \frac{2S}{3b}$, $PN = \frac{2S}{3c}$

$\triangle DEF \sim \triangle LMN$ で、相似比は $2:1$ であるから、

$\triangle DEF = 4 \times \triangle LMN = 4(\triangle PMN + \triangle PNL + \triangle PLM)$

ここで、 $\triangle PMN = \frac{1}{2} \cdot \frac{2S}{3b} \cdot \frac{2S}{3c} \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2S}{3b} \cdot \frac{2S}{3c} \cdot \frac{2S}{bc} = \frac{4S^3}{9b^2c^2}$

同様に、 $\triangle PNL = \frac{4S^3}{9c^2a^2}$, $\triangle PLM = \frac{4S^3}{9a^2b^2}$ であるから

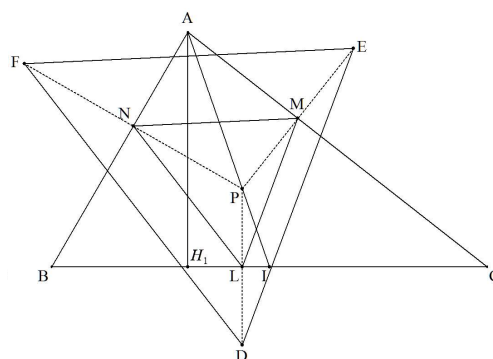
$\triangle DEF = 4 \left(\frac{4S^3}{9b^2c^2} + \frac{4S^3}{9c^2a^2} + \frac{4S^3}{9a^2b^2} \right) = \frac{1}{9} \left(\frac{4S}{abc} \right)^2 (a^2 + b^2 + c^2) S = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9R^2} S$

よって、 $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9R^2}$ 〔終〕

〔補足〕 $R = \frac{abc}{4S}$, $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ($s = \frac{a+b+c}{2}$) であるから、辺で表すと

$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{16s(s-a)(s-b)(s-c)(a^2 + b^2 + c^2)}{9a^2b^2c^2}$ 〔答〕

(2019/9/15 時岡)



3. $\triangle ABC$ の内接円の半径を r , PD , PE , PF の中点をそれぞれ L , M , N とする。

$PL=PM=PN=r$ である。

$\triangle DEF \sim \triangle LMN$ で、相似比は $2:1$ であるから、

$$\triangle DEF = 4 \times \triangle LMN = 4(\triangle PMN + \triangle PNL + \triangle PLM)$$

$$\text{ここで、} \triangle PMN = \frac{1}{2} r^2 \sin A$$

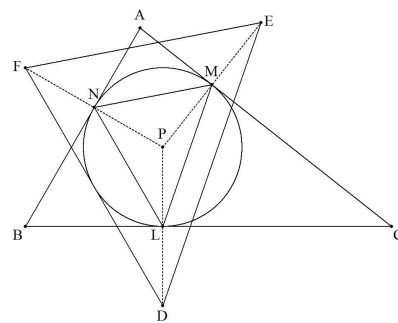
$$\text{同様に、} \triangle PNL = \frac{1}{2} r^2 \sin B, \quad \triangle PLM = \frac{1}{2} r^2 \sin C \text{ であるから}$$

$$\triangle DEF = 4 \cdot \frac{1}{2} r^2 (\sin A + \sin B + \sin C) = 2r^2 \left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} \right) = \frac{2r^2 s}{R} = \frac{2r}{R} S$$

$$\text{よって、} \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{2r}{R} \quad \text{終}$$

$$\text{補足} \quad s = \frac{a+b+c}{2} \text{ として、辺で表すと}$$

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{2 \cdot \frac{S}{s}}{\frac{abc}{4S}} = \frac{8S^2}{abcs} = \frac{8s(s-a)(s-b)(s-c)}{abcs} = \frac{8(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \quad \text{答}$$



(2019/9/15 時岡)

4. [解答] I_1D , I_1E , I_1F の中点をそれぞれ L , M , N とおく。

$\triangle DEF \sim \triangle LMN$ で、相似比が $2:1$ であるから、

$$\triangle DEF = 4 \times \triangle LMN = 4 \times (\triangle I_1ML + \triangle I_1LN - \triangle I_1MN)$$

ここで、 $\angle MI_1L = C$, $\angle LI_1N = B$ である。また、 $\triangle ABC$ の $\angle A$ 内の傍接円の半径を r_1 とおくと、 $I_1L = I_1M = I_1N = r_1$ であるから

$$\begin{aligned} \triangle DEF &= 4 \left\{ \frac{1}{2} r_1^2 \sin C + \frac{1}{2} r_1^2 \sin B - \frac{1}{2} r_1^2 \sin(B+C) \right\} \\ &= 2r_1^2 \{ \sin B + \sin C - \sin(B+C) \} \\ &= 2r_1^2 \left(\frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} - \frac{a}{2R} \right) = \frac{2r_1^2(s-a)}{R} = \frac{2r_1}{R} S \end{aligned}$$

よって、 $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{2r_1}{R}$ [終]

[補足] $s = \frac{a+b+c}{2}$ とおくと、 $S = r_1(s-a)$, $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (ヘロンの公式) であるから、

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{2r_1}{R} = \frac{\frac{2S}{s-a}}{\frac{abc}{4S}} = \frac{8S^2}{abc(s-a)} = \frac{8s(s-b)(s-c)}{abc} \quad \text{[答]}$$

(2019/9/15 時岡)

[公式] $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ である $\triangle ABC$ の面積を S , $\angle A$ 内の傍接円の半径を r_1 とすると、

$$S = r_1(s-a) \text{ である。ただし、} s = \frac{a+b+c}{2}$$

[証明] $\angle A$ 内の傍心を I_1 とし、 I_1 から BC , CA , AB に下した垂線の足をそれぞれ L , M , N とする。

また、便宜上、 $BL = a_1$, $LC = a_2$ とおく。 $a_1 + a_2 = a$

$$AN + AM = (c + a_1) + (a_2 + b) = a + b + c = 2s$$

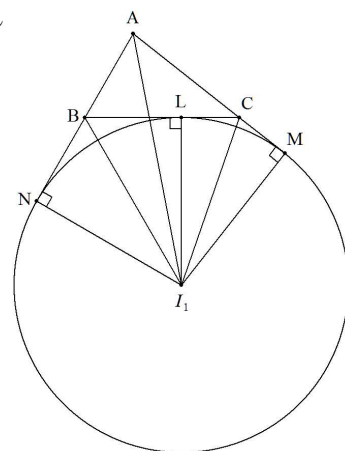
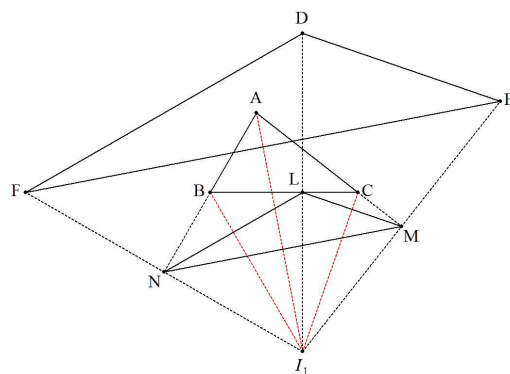
$AN = AM$ であるから、 $AN = AM = s$, $BN = s - c$, $CM = s - b$ である。

$$S = \text{四角形 } ANI_1M - (\text{四角形 } BNI_1L + \text{四角形 } CLI_1M)$$

$$= r_1 s - \{ r_1(s-c) + r_1(s-b) \} = r_1(b+c-s) = r_1(s-a) \quad \text{[終]}$$

[補足] 同様に、 $\angle B$, $\angle C$ 内の傍接円の半径をそれぞれ r_2 , r_3 とおくと、

$$S = r_2(s-b) = r_3(s-c)$$



5. PD, PE, PF の中点をそれぞれ L, M, N とする。

$\triangle CPL \sim \triangle CBN$ より, $PL : a \cos B = b \cos C : a \sin B$

$$PL = \frac{a \cos B \cdot b \cos C}{a \sin B} = 2R \cos B \cos C$$

同様に, $PM = 2R \cos C \cos A$, $PN = 2R \cos A \cos B$

$\triangle DEF \sim \triangle LMN$ で, 相似比は 2 : 1 であるから,

$$\triangle DEF = 4 \times \triangle LMN = 4(\triangle PMN + \triangle PNL + \triangle PLM)$$

$$\text{ここで, } \triangle PMN = \frac{1}{2} \cdot 2R \cos C \cos A \cdot 2R \cos A \cos B \cdot \sin A$$

$$= R^2 \cos A \cos B \cos C \sin 2A$$

同様に, $\triangle PNL = R^2 \cos A \cos B \cos C \sin 2B$, $\triangle PLM = R^2 \cos A \cos B \cos C \sin 2C$ であるから

$$\triangle DEF = 4R^2 \cos A \cos B \cos C (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

ここで, 括弧の中 = $2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C = 2 \sin C \{ \cos(A-B) - \cos(A+B) \}$

$$= 2 \sin C \cdot (-2) \sin A \sin(-B) = 4 \sin A \sin B \sin C \text{ であるから,}$$

$$\triangle DEF = 4R^2 \cos A \cos B \cos C \cdot 4 \sin A \sin B \sin C = 2R^2 \sin A \sin B \sin C \cdot 8 \cos A \cos B \cos C$$

$$= S \cdot 8 \cos A \cos B \cos C$$

$$\text{よって, } \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 8 \cos A \cos B \cos C \quad \text{終}$$

補足 辺で表すと,

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 8 \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{a^2 b^2 c^2} \quad \text{答}$$

(2019/9/15 時図)

6. (1) $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $s = \frac{a+b+c}{2}$ とおく。

$AI = AK = s - a$, $BK = BI = s - b$, $CI = CJ = s - c$ であるから

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BI}{IC} \cdot \frac{CJ}{JA} = \frac{s-a}{s-b} \cdot \frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a} = 1 \text{ より}$$

チェバの定理の逆により, AI, BJ, CK は 1 点 P で交わる。

(2) $AI = i$, $BJ = j$, $CK = k$ とおく。

$\angle AIB + \angle AIC = 180^\circ$ であるから, $\cos \angle AIB + \cos \angle AIC = 0$

$$\text{余弦定理より, } \frac{i^2 + (s-b)^2 - c^2}{2i(s-b)} + \frac{i^2 + (s-c)^2 - b^2}{2i(s-c)} = 0$$

$$(s-c)\{i^2 + (s-b)^2 - c^2\} + (s-b)\{i^2 + (s-c)^2 - b^2\} = 0$$

$$(2s-b-c)i^2 = (s-c)(c+b-s)(s-b+c) + (s-b)(b+c-s)(s-c+b)$$

$$ai^2 = \left(b+c - \frac{a+b+c}{2}\right)\{(s-c)(s-b+c) + (s-b)(s+b-c)\}$$

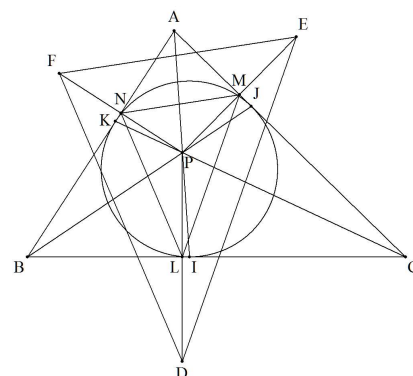
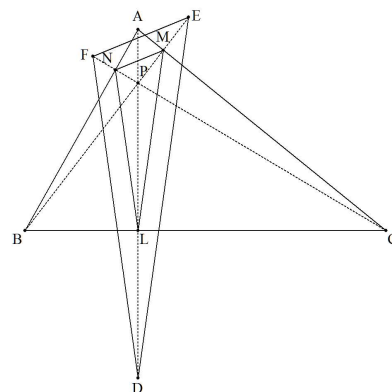
$$= \frac{b+c-a}{2}\{s^2 - c^2 - b(s-c) + s^2 - b^2 - c(s-b)\} = (s-a)\{2s^2 - b^2 - c^2 - (b+c)s + 2bc\}$$

$$= (s-a)\{2s^2 - (b-c)^2 - (2s-a)s\} = (s-a)\{as - (b-c)^2\}$$

$$\therefore i^2 = \frac{(s-a)\{as - (b-c)^2\}}{a} \quad \text{同様に, } j^2 = \frac{(s-b)\{bs - (c-a)^2\}}{b}, \quad k^2 = \frac{(s-c)\{cs - (a-b)^2\}}{c}$$

$$\text{メネラウスの定理により } \frac{AP}{PI} \cdot \frac{IB}{BC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AP}{PI} \cdot \frac{s-b}{a} \cdot \frac{s-c}{s-a} = 1 \text{ であるから, } \frac{AP}{PI} = \frac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)}$$

$$\therefore PI = \frac{(s-b)(s-c)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} AI = \frac{(s-b)(s-c)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} i$$



ここで、 $a(s-a)+(s-b)(s-c)=\frac{2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2}{4}$ は定数であるから、 d とおく。

$$i.e. \quad d=a(s-a)+(s-b)(s-c)=b(s-b)+(s-c)(s-a)=c(s-c)+(s-a)(s-b)$$

$$PI=\frac{(s-b)(s-c)i}{d} \quad \text{同様に, } PJ=\frac{(s-c)(s-a)j}{d}, \quad PK=\frac{(s-a)(s-b)k}{d}$$

PD, PE, PF の中点をそれぞれ L, M, N とする。

$$\triangle PBC=\frac{PI}{AI}S=\frac{(s-b)(s-c)}{d}S=\frac{1}{2}aPL \text{より} \quad \therefore PL=\frac{2(s-b)(s-c)}{ad}S$$

$$\text{同様に, } PM=\frac{2(s-c)(s-a)}{bd}S, \quad PN=\frac{2(s-a)(s-b)}{cd}S$$

$\triangle DEF \sim \triangle LMN$ で、相似比は $2:1$ であるから、 $\triangle DEF=4 \times \triangle LMN$

$$\text{ここで, } \triangle PMN=\frac{1}{2}PM \cdot PN \sin(180^\circ-A)=\frac{1}{2}PM \cdot PN \sin A=\frac{1}{2}PM \cdot PN \frac{2S}{bc}=\frac{S}{bc}PM \cdot PN$$

$$=\frac{S}{bc} \cdot \frac{2(s-c)(s-a)}{bd}S \cdot \frac{2(s-a)(s-b)}{cd}S=\frac{4(s-a)^2(s-b)(s-c)}{b^2c^2d^2}S^3$$

$$=\frac{4s(s-a)^2(s-b)(s-c)}{b^2c^2d^2s}S^3=\frac{4(s-a)}{b^2c^2d^2s}S^5$$

同様に、 $\triangle PNL=\frac{4(s-b)}{c^2a^2d^2s}S^5$ 、 $\triangle PLM=\frac{4(s-c)}{a^2b^2d^2s}S^5$ であるから、

$$\triangle LMN=\triangle PMN+\triangle PNL+\triangle PLM=\frac{4(s-a)}{b^2c^2d^2s}S^5+\frac{4(s-b)}{c^2a^2d^2s}S^5+\frac{4(s-c)}{a^2b^2d^2s}S^5$$

$$=\frac{4S^5}{a^2b^2c^2d^2s}\{a^2(s-a)+b^2(s-b)+c^2(s-c)\}$$

ここで、中括弧の中

$$=s(a^2+b^2+c^2)-(a^3+b^3+c^3-3abc+3abc)=s(a^2+b^2+c^2)-2s(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)-3abc$$

$$=s(-a^2-b^2-c^2+2bc+2ca+2ab)-3abc=s \cdot 4d-3 \cdot 4RS=4s\left(d-3 \cdot \frac{S}{s} \cdot R\right)=4s(d-3rR) \text{ であるから}$$

$$\triangle LMN=\frac{4S^5}{a^2b^2c^2d^2s} \cdot 4s(d-3rR)=\left(\frac{4S}{abc}\right)^2 \frac{(d-3rR)S^3}{d^2}=\frac{(d-3rR)S^3}{d^2R^2}$$

$$\text{よって, } \triangle DEF=4 \times \triangle LMN, \triangle ABC=S \text{ であるから, } \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{4 \cdot \triangle LMN}{\triangle ABC}=\frac{4(d-3rR)S^2}{d^2R^2} \quad \text{終}$$

(2019/9/21 時間)

7. (1) I, J, K は傍接円の接点であるから、

$$KB=CM=s-a, \quad IC=AK=s-b, \quad MA=BI=s-c$$

$$\text{である。ただし, } s=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BI}{IC} \cdot \frac{CJ}{JA}=\frac{s-b}{s-a} \cdot \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c}=1$$

チェバの定理の逆により、AI, BJ, CK は 1 点 P で交わる。 終

(2) PD, PE, PF の中点をそれぞれ L, M, N とする。

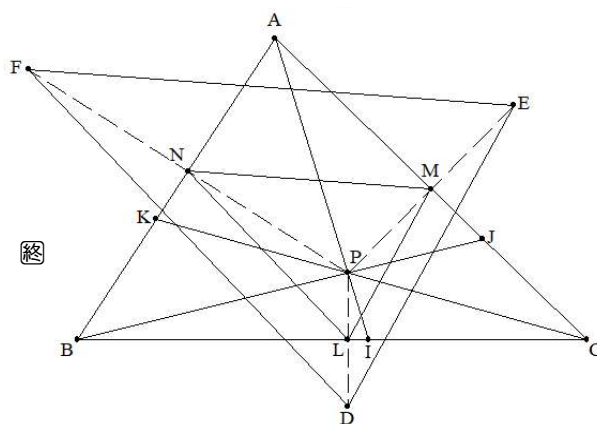
$\triangle DEF \sim \triangle LMN$ で、相似比が $2:1$ であるから、

$$\triangle DEF=4 \times \triangle LMN$$

$$\triangle LMN=\triangle PMN+\triangle PNL+\triangle PLM \quad \cdots \textcircled{1} \text{ である。}$$

メネラウスの定理により

$$\frac{AP}{PI} \cdot \frac{IB}{BC} \cdot \frac{CJ}{JA}=\frac{AP}{PI} \cdot \frac{s-c}{a} \cdot \frac{s-a}{s-c}=1 \quad \therefore \frac{AP}{PI}=\frac{a}{s-a} \text{ より, } \frac{PI}{AI}=\frac{s-a}{s}$$



$$\triangle ABC = S \text{ とおくと, } \triangle PBC = \frac{1}{2}a \text{ PL} = \frac{PI}{AI}S = \frac{s-a}{s}S \text{ より, } \text{PL} = \frac{2(s-a)}{as}S$$

$$\text{同様に, } \text{PM} = \frac{2(s-b)}{bs}S, \text{ PN} = \frac{2(s-c)}{cs}S$$

$$\triangle PMN = \frac{1}{2} \text{PM} \cdot \text{PN} \sin(180^\circ - A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(s-b)}{bs}S \cdot \frac{2(s-c)}{cs}S \cdot \frac{2S}{bc} = \frac{4(s-b)(s-c)}{b^2c^2s^2}S^3$$

$$\text{同様に, } \triangle PNL = \frac{4(s-c)(s-a)}{c^2a^2s^2}S^3, \triangle PLM = \frac{4(s-a)(s-b)}{a^2b^2s^2}S^3$$

これらを①に代入して

$$\triangle LMN = \frac{4(s-b)(s-c)}{b^2c^2s^2}S^3 + \frac{4(s-c)(s-a)}{c^2a^2s^2}S^3 + \frac{4(s-a)(s-b)}{a^2b^2s^2}S^3$$

$$= \frac{4S^3}{a^2b^2c^2s^2} \{a^2(s-b)(s-c) + b^2(s-c)(s-a) + b^2(s-a)(s-b)\}$$

$$\{ \quad \} \text{の中} = (a^2 + b^2 + c^2)s^2 - \{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)\}s + abc(a+b+c)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)s^2 - \{(a+b+c)(bc+ca+ab) - 3abc\}s + 2abcs$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)s^2 - 2(bc+ca+ab)s^2 + 5abcs = s\{5abc - (2bc+2ca+2ab - a^2 - b^2 - c^2)s\}$$

ここで, $2bc+2ca+2ab - a^2 - b^2 - c^2 = 4d$, $abc = 4RS$, $r = \frac{S}{s}$ であるから

$$\{ \quad \} \text{の中} = s(5 \cdot 4RS - 4d \cdot s) = 4s^2 \left(5R \cdot \frac{S}{s} - d \right) = 4s^2(5Rr - d)$$

$$\triangle LMN = \frac{4S^3}{a^2b^2c^2s^2} \cdot 4s^2(5Rr - d) = \left(\frac{4S}{abc} \right)^2 (5Rr - d)S = \frac{5Rr - d}{R^2}S$$

$$\text{よって, } \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 4 \cdot \frac{5Rr - d}{R^2} = \frac{4(5Rr - d)}{R^2} \quad \text{〔終〕}$$

$$\text{〔補足〕 } d = \frac{2bc+2ca+2ab - a^2 - b^2 - c^2}{4} \text{ の値について}$$

$\triangle ABC$ の内接円と BC, CA, AB との接点をそれぞれ I, J, K とすると, AI, BJ, CK は 1 点で交わる。この点をジェルゴンヌ (Gergonne) 点という。

この点について, $\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値を計算すると, 同様に現れる値である。

$$d = a(s-a) + (s-b)(s-c) = b(s-b) + (s-c)(s-a) = c(s-c) + (s-a)(s-b) = bc + ca + ab - s^2$$

(2019/9/26 時岡)

8. (1) AA' と BC , BB' と CA , CC' と AB との交点をそれぞれ, I , J , K とおく。

正三角形 $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ の相似比は, $a:b:c$ であるから,

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BI}{IC} \cdot \frac{CJ}{JA} = \frac{\triangle CAC'}{\triangle CBC'} \cdot \frac{\triangle ABA'}{\triangle ACA'} \cdot \frac{\triangle BCB'}{\triangle BAB'} \\ = \frac{\triangle CAC'}{\triangle BAB'} \cdot \frac{\triangle ABA'}{\triangle CBC'} \cdot \frac{\triangle BCB'}{\triangle ACA'} = \frac{c \cdot b}{b \cdot c} \cdot \frac{a \cdot c}{c \cdot a} \cdot \frac{b \cdot a}{a \cdot b} = 1$$

チェバの定理の逆により, AA' , BB' , CC' は1点 P で交わる。

- (2) $AP=x$, $BP=y$, $CP=z$ とおく。

$$\triangle PBC = \frac{1}{2} yz \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} yz$$

$$\text{同様に, } \triangle PCA = \frac{\sqrt{3}}{4} zx, \triangle PAB = \frac{\sqrt{3}}{4} xy$$

これらを, $\triangle PBC + \triangle PCA + \triangle PAB = S$ に代入すると,

$$\frac{\sqrt{3}}{4} yz + \frac{\sqrt{3}}{4} zx + \frac{\sqrt{3}}{4} xy = S$$

$$\therefore yz + zx + xy = \frac{4}{\sqrt{3}} S \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle PBC \text{ に余弦定理を適用すると, } y^2 + z^2 - 2yz \cos 120^\circ = a^2 \quad \therefore y^2 + yz + z^2 = a^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{同様に, } z^2 + zx + x^2 = b^2 \quad \dots \textcircled{3}, \quad x^2 + xy + y^2 = c^2 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ より, } 2(x^2 + y^2 + z^2) + yz + zx + xy = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{変形すると, } 2(x+y+z)^2 - 3(yz + zx + xy) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{これに}\textcircled{1}\text{を代入すると, } 2(x+y+z)^2 - 3 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} S = a^2 + b^2 + c^2$$

$$x+y+z > 0 \text{ より, } x+y+z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2}} = k \quad \dots \textcircled{5} \text{ とおく。}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \text{ より, } (y-x)(y+x) + z(y-x) = a^2 - b^2 \quad (y-x)(y+x+z) = a^2 - b^2 \quad \therefore y = x + \frac{a^2 - b^2}{k} \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\text{同様に, } \textcircled{2} - \textcircled{4} \text{ より, } (z-x)(z+x) + y(z-x) = a^2 - c^2 \quad \therefore z = x + \frac{a^2 - c^2}{k} \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{6}, \textcircled{7} \text{ を}\textcircled{5}\text{に代入すると, } x + \left(x + \frac{a^2 - b^2}{k}\right) + \left(x + \frac{a^2 - c^2}{k}\right) = k$$

$$3x = k - \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{k} = \frac{k^2 - 2a^2 + b^2 + c^2}{k} = \frac{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2} - 2a^2 + b^2 + c^2}{k} \\ = \frac{-3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4\sqrt{3}S}{2k}$$

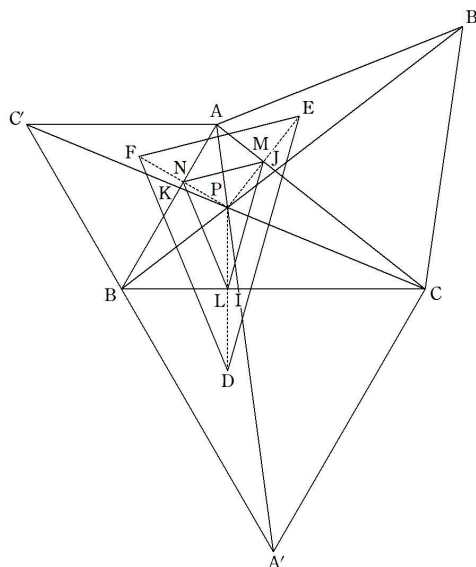
$$\therefore x = \frac{-a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k} \quad \text{同様に, } y = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}, \quad z = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}$$

PD , PE , PF の中点をそれぞれ L , M , N とおく。

$$\triangle PBC = \frac{1}{2} a \cdot PL = \frac{1}{2} yz \sin 120^\circ \text{ より, } PL = \frac{\sqrt{3} yz}{2a} \quad \text{同様に, } PM = \frac{\sqrt{3} zx}{2b}, \quad PN = \frac{\sqrt{3} xy}{2c}$$

$$\triangle PMN = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} zx}{2b} \cdot \frac{\sqrt{3} xy}{2c} \sin A = \frac{3x^2 yz}{8bc} \cdot \frac{2S}{bc} = \frac{3x^2 yz S}{4b^2 c^2}$$

$$\text{同様に, } \triangle PNL = \frac{3xy^2 z S}{4c^2 a^2}, \quad \triangle PLM = \frac{3xyz^2 S}{4a^2 b^2}$$



$$\triangle LMN = \triangle PMN + \triangle PNL + \triangle PLM = \frac{3x^2yzS}{4b^2c^2} + \frac{3xy^2zS}{4c^2a^2} + \frac{3xyz^2S}{4a^2b^2} = \frac{3xyz(a^2x + b^2y + c^2z)}{4a^2b^2c^2} S$$

$\triangle DEF \sim \triangle LMN$ で、相似比は2:1であるから、 $\triangle DEF = 4 \times \triangle LMN$

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 4 \times \frac{3xyz(a^2x + b^2y + c^2z)}{4a^2b^2c^2} = \frac{3xyz(a^2x + b^2y + c^2z)}{a^2b^2c^2}$$

ここで、

$$\begin{aligned} a^2x + b^2y + c^2z &= a^2 \cdot \frac{-a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k} + b^2 \cdot \frac{a^2 - b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k} + c^2 \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k} \\ &= \frac{1}{2k} \left\{ a^2(-a^2 + b^2 + c^2) + b^2(a^2 - b^2 + c^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) + \frac{4}{\sqrt{3}}(a^2 + b^2 + c^2)S \right\} \\ &= \frac{1}{2k} \left\{ 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 + \frac{4}{\sqrt{3}}(a^2 + b^2 + c^2)S \right\} \\ &= \frac{1}{2k} \left\{ (4S)^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}(a^2 + b^2 + c^2)S \right\} = \frac{4S}{2\sqrt{3}k} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S) = \frac{2S}{\sqrt{3}k} \cdot 2k^2 \quad (\because \textcircled{5} \text{より}) = \frac{4kS}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} &= \frac{3 \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k} \right) \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k} \right) \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k} \right) \cdot \frac{4kS}{\sqrt{3}}}{a^2b^2c^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}S \left(-a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S \right) \left(a^2 - b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S \right) \left(a^2 + b^2 - c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S \right)}{a^2b^2c^2 \cdot 2k^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}S \left(-a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S \right) \left(a^2 - b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S \right) \left(a^2 + b^2 - c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S \right)}{a^2b^2c^2 (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S)} \end{aligned}$$

$$\text{ここで、} a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S = f \text{ とおくと、} \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}S(f - 2a^2)(f - 2b^2)(f - 2c^2)}{a^2b^2c^2 \left(f + \frac{8}{\sqrt{3}}S \right)} \quad \textcircled{終}$$

補足 (11) Kiepert点の場合のように求めることもできる。

(2019/9/19 時岡)

9. (1) Cを通り、CAに垂直な直線とBCの垂直二等分線の交点Qを中心、QCを半径とする円を描く。

同様に、Aを通り、ABに垂直な直線とCAの垂直二等分線の交点Rを中心、RAを半径とする円を描く。この2円の交点のうち、C以外の交点が求める点Pである。

なお、Bを通り、BCに垂直な直線とABの垂直二等分線の交点Sを中心、SBを半径とする円は点Pを通る。

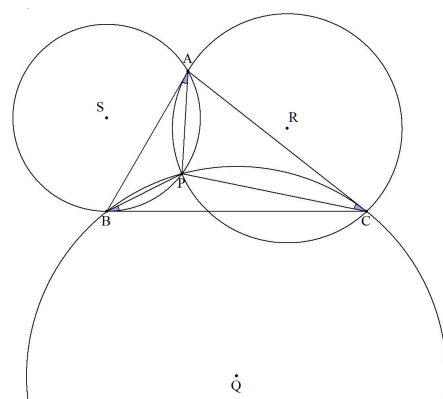
証明

円Qにおいて、接弦定理より、 $\angle PBC = \angle PCA \quad \dots \textcircled{1}$

同様に、円Rにおいて、 $\angle PCA = \angle PAB \quad \dots \textcircled{2}$

①、②より、 $\angle PAC = \angle PBC$ であるから、接弦定理の逆により、PはBでBCに接し、点Aを通る円周上の点である。

よって、この点Pのとき、 $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$ となる。 **終**



(2) $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \omega$, $AP = x$, $BP = y$, $CP = z$ とおく。

$$\triangle PBC = \frac{1}{2} a y \sin \omega = \frac{1}{2} a y \cos \omega \tan \omega = \frac{a^2 + y^2 - z^2}{4} \tan \omega$$

$$\text{同様に, } \triangle PCA = \frac{b^2 + y^2 - x^2}{4} \tan \omega, \triangle PAB = \frac{c^2 + x^2 - y^2}{4} \tan \omega$$

$\triangle PBC + \triangle PCA + \triangle PAB = S$ であるから

$$\frac{a^2 + y^2 - z^2}{4} \tan \omega + \frac{b^2 + y^2 - x^2}{4} \tan \omega + \frac{c^2 + x^2 - y^2}{4} \tan \omega = S$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} \tan \omega = S \quad \therefore \tan \omega = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\begin{aligned} \sin \omega &= \frac{\tan \omega}{\sqrt{1 + \tan^2 \omega}} = \frac{\frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2}} = \frac{4S}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}} \\ &= \frac{4S}{\sqrt{4(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)}} = \frac{2S}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

PD, PE, PF の中点をそれぞれ L, M, N とする。

$\triangle DEF \sim \triangle LMN$ で、相似比は 2 : 1 であるから、 $\triangle DEF = 4 \times \triangle LMN = 4(\triangle PMN + \triangle PNL + \triangle PLM)$

$PL = y \sin \omega$, $PM = z \sin \omega$, $PN = x \sin \omega$

$\triangle PAB$ に正弦定理を適用すると、 $\frac{y}{\sin \omega} = \frac{c}{\sin B} \quad \therefore y = \frac{c \sin \omega}{\sin B}$ 同様に、 $z = \frac{a \sin \omega}{\sin C}$, $x = \frac{b \sin \omega}{\sin A}$

$$PL = \frac{c \sin^2 \omega}{\sin B}, \quad PM = \frac{a \sin^2 \omega}{\sin C}, \quad PN = \frac{b \sin^2 \omega}{\sin A}$$

$$\triangle PMN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \sin^2 \omega}{\sin C} \cdot \frac{b \sin^2 \omega}{\sin A} \cdot \sin A = \frac{ab \sin^4 \omega}{2 \sin C} = \frac{ab \cdot ab \sin^4 \omega}{2 \cdot 2S} = \frac{a^2 b^2 \sin^4 \omega}{4S}$$

$$\text{同様に, } \triangle PBC = \frac{b^2 c^2 \sin^4 \omega}{4S}, \triangle PCA = \frac{c^2 a^2 \sin^4 \omega}{4S} \text{ である。}$$

$$\triangle LMN = \frac{a^2 b^2 \sin^4 \omega}{4S} + \frac{b^2 c^2 \sin^4 \omega}{4S} + \frac{c^2 a^2 \sin^4 \omega}{4S} = \frac{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}{4S} \sin^4 \omega$$

①を代入すると

$$\triangle LMN = \frac{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}{4S} \left(\frac{2S}{\sqrt{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}} \right)^4 = \frac{4S^3}{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}$$

よって、

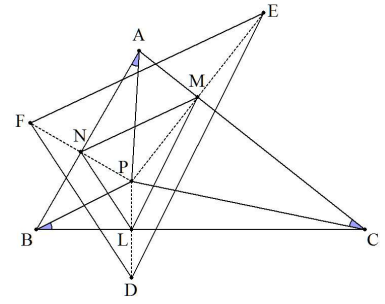
$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 4 \cdot \frac{4S^3}{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2} = \frac{(4S)^2}{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2} \quad \textcircled{\text{終}}$$

補足 辺で表すと

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} \leq 1$$

$$\textcircled{\text{証明}} \quad a^4 + b^4 + c^4 - (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = \frac{1}{2}[(b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 + (a^2 - b^2)^2] \geq 0$$

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} \geq 1 \text{ より, } \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 2 - \frac{a^4 + b^4 + c^4}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} \leq 2 - 1 = 1 \quad \textcircled{\text{終}}$$



(2019/9/16 時岡)

10. (1) 中線 $AG_1 = l$ とおくと、中線定理により、

$$b^2 + c^2 = 2 \left[l^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right] \quad \therefore l^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

[1] $b > c$ の場合

$$\angle BAI = \angle CAG_1 = \alpha, \quad BI = x_1 \quad (0 < x_1 < \frac{a}{2}),$$

$AI = y_1 l$ とおく。

$\triangle ABI$, $\triangle ACG_1$ に正弦定理を適用して、

$$\frac{x_1}{\sin \alpha} = \frac{y_1 l}{\sin B}, \quad \frac{\frac{a}{2}}{\sin \alpha} = \frac{l}{\sin C}$$

この2式より $\sin \alpha$ を消去すると、

$$y_1 = \frac{2 \sin B}{a \sin C} x_1 = \frac{2b}{ca} x_1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\triangle ABI$ に余弦定理を適用すると、

$$(y_1 l)^2 = c^2 + x_1^2 - 2cx_1 \cos B$$

これに、①、②、 $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ を代入すると、

$$\left(\frac{2b}{ca} x_1 \right)^2 \cdot \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = c^2 + x_1^2 - 2cx_1 \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

両辺に $c^2 a^2$ をかけ、整理すると、 $\{b^2(2b^2 + 2c^2 - a^2) - c^2 a^2\} x_1^2 + c^2 a(c^2 + a^2 - b^2) x_1 - c^4 a^2 = 0$

$$(2b^2 - a^2)(b^2 + c^2) x_1^2 + c^2 a(c^2 + a^2 - b^2) x_1 + c^2 a(-c^2 a) = 0$$

$$\begin{array}{rcl} 2b^2 - a^2 & \times & c^2 a \longrightarrow ab^2 c^2 + ac^4 \\ b^2 + c^2 & \times & -c^2 a \longrightarrow -2ab^2 c^2 + a^3 c^2 \\ \hline & & c^2 a(c^2 + a^2 - b^2) \end{array}$$

$$\therefore \{(2b^2 - a^2)x_1 + c^2 a\} \{(b^2 + c^2)x_1 - c^2 a\} = 0$$

$0 < x_1 < \frac{a}{2}$ より、 $x_1 = \frac{c^2 a}{a^2 - 2b^2}$ は不適。

($\because$) (i) $a^2 - 2b^2 < 0$ のとき、 $x_1 < 0$ より、不適。

(ii) $a^2 - 2b^2 > 0$ のとき、 $\frac{a}{2} - x_1 = \frac{a}{2} - \frac{c^2 a}{a^2 - 2b^2} = \frac{a(a^2 - 2b^2 - 2c^2)}{2(a^2 - 2b^2)} = -\frac{2al}{a^2 - 2b^2} < 0$ より、不適。

(iii) $a^2 - 2b^2 = 0$ のとき、 x_1 は解にならない。

$$\therefore x_1 = \frac{c^2 a}{b^2 + c^2} = BI, \quad IC = a - \frac{c^2 a}{b^2 + c^2} = \frac{ab^2}{b^2 + c^2} \quad \therefore BI : IC = c^2 : b^2$$

同様に、 $CJ : JA = a^2 : c^2$, $AK : KB = b^2 : a^2$

$$\text{よって、} \frac{AK}{KB} \cdot \frac{BI}{IC} \cdot \frac{CJ}{JA} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} = 1 \text{ より、}$$

チェバの定理の逆により、 AI , BJ , CJ は1点で交わる。 終

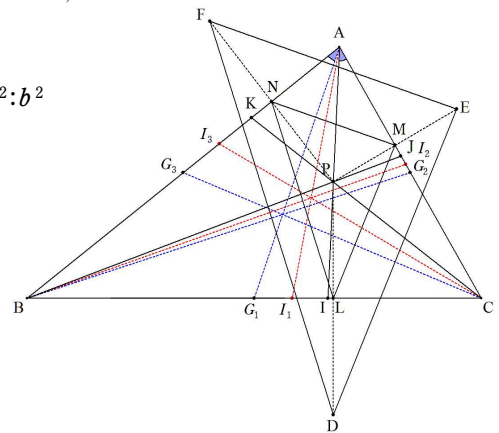
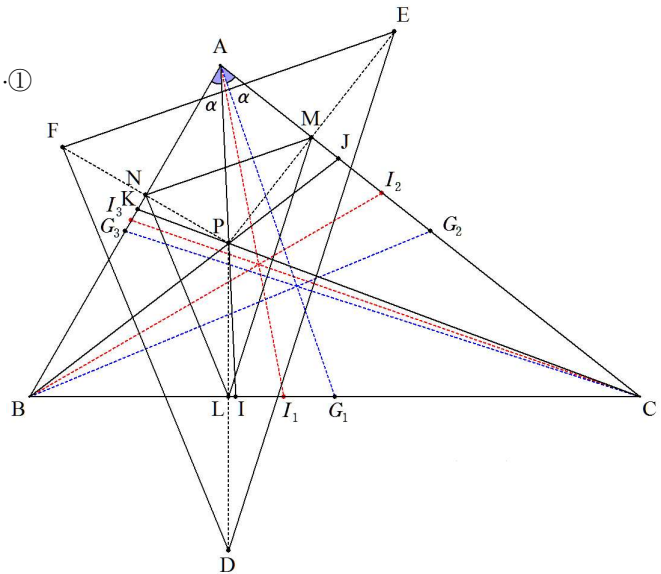
[2] $b < c$ のとき (右図)

$$\angle CAI = \angle BAG_1 = \alpha, \quad CI = x_1 \quad (0 < x_1 < \frac{a}{2}), \quad AI = y_1 l \text{ とおく、}$$

[1] と同様の結果が得られる。

(2) PD , PE , PF の中点をそれぞれ L , M , N とする。

$\triangle DEF \sim \triangle LMN$ で、相似比は $2 : 1$ であるから、 $\triangle DEF = 4 \times \triangle LMN = 4 (\triangle PMN + \triangle PNL + \triangle PLM)$



$\triangle PMN = \frac{1}{2} PM \cdot PN \sin A$, $\triangle PNL = \frac{1}{2} PN \cdot PL \sin B$, $\triangle PLM = \frac{1}{2} PL \cdot PM \sin C$ であるから, PL , PM , PN を求める。

$$\text{メネラウスの定理から, } \frac{AP}{PI} \cdot \frac{IB}{BC} \cdot \frac{CJ}{JA} = \frac{AP}{PI} \cdot \frac{c^2}{c^2+b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} = 1 \text{ より, } \frac{AP}{PI} = \frac{b^2+c^2}{a^2}$$

$$\therefore \frac{PI}{AI} = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\triangle PBC = \frac{1}{2} a PL = \frac{PI}{AI} S = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} S \text{ より, } PL = \frac{2a}{a^2+b^2+c^2} S$$

$$\text{同様に, } PM = \frac{2b}{a^2+b^2+c^2} S, \quad PN = \frac{2c}{a^2+b^2+c^2} S$$

$$\triangle PMN = \frac{1}{2} PM \cdot PN \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b}{a^2+b^2+c^2} S \cdot \frac{2c}{a^2+b^2+c^2} S \cdot \frac{2S}{bc} = \frac{4S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

$$\text{同様に, } \triangle PNL = \triangle PLM = \frac{4S^3}{(a^2+b^2+c^2)^2}$$

$$\text{よって, } \frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{4S^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} = \frac{3(4S)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \quad \text{終}$$

(2019/9/28 時岡)

11. 解答

(1) AA' と BC , BB' と CA , CC' と AB との交点をそれぞれ, I , J , K とおく。

相似である $\triangle A'BC$, $\triangle B'CA$, $\triangle C'AB$ の相似比は, $a:b:c$ であるから,

$A'B = A'C = ka$ とおくと, $B'C = B'A = kb$, $C'A = C'B = kc$ となる。

$$\text{ただし, } k = \frac{1}{2\cos\theta}$$

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BI}{IC} \cdot \frac{CJ}{JA} = \frac{\triangle CAC'}{\triangle CBC'} \cdot \frac{\triangle ABA'}{\triangle ACA'} \cdot \frac{\triangle BCB'}{\triangle BAB'}$$

$$= \frac{\triangle CAC'}{\triangle BAB'} \cdot \frac{\triangle ABA'}{\triangle CBC'} \cdot \frac{\triangle BCB'}{\triangle ACA'} = \frac{kc \cdot b}{kb \cdot c} \cdot \frac{ka \cdot c}{kc \cdot a} \cdot \frac{kb \cdot a}{ka \cdot b} = 1$$

よって, チェバの定理の逆により, AI , BJ , CK は 1 点で交わる。

I , J , K はそれぞれ AA' , BB' , CC' 上の点であるから, AA' , BB' , CC' は 1 点 P で交わる。

(2) PD , PE , PF の中点をそれぞれ L , M , N とおく。

$$BI : IC = \triangle ABA' : \triangle ACA' = \frac{1}{2} c \cdot ka \sin(B+\theta) : \frac{1}{2} b \cdot ka \sin(C+\theta) = c \sin(B+\theta) : b \sin(C+\theta) \text{ より}$$

$$BI = \frac{c \sin(B+\theta)}{c \sin(B+\theta) + b \sin(C+\theta)} \cdot a = \frac{c(\sin B \cos \theta + \cos B \sin \theta)}{c(\sin B \cos \theta + \cos B \sin \theta) + b(\sin C \cos \theta + \cos C \sin \theta)} \cdot a$$

$$= \frac{c \cos B \sin \theta + c \sin B \cos \theta}{(c \cos B + b \cos C) \sin \theta + (c \sin B + b \cos C) \cos \theta} \cdot a = \frac{c \cos B \sin \theta + c \sin B \cos \theta}{a \sin \theta + 2c \sin B \cos \theta} \cdot a$$

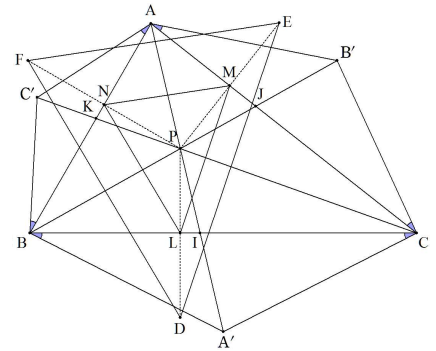
$$= \frac{c \cdot \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \cdot \sin \theta + c \cdot \frac{2S}{ca} \cdot \cos \theta}{a \sin \theta + 2c \cdot \frac{2S}{ca} \cdot \cos \theta} \cdot a = \frac{(c^2+a^2-b^2) \sin \theta + 4S \cos \theta}{2(a^2 \sin \theta + 4S \cos \theta)} \cdot a = \frac{c^2+a^2-b^2 + \frac{4S}{\tan \theta}}{2\left(a^2 + \frac{4S}{\tan \theta}\right)} \cdot a$$

$$= \frac{a^2-b^2+c^2+d}{2(a^2+d)} \cdot a$$

ここで, $-a^2+b^2+c^2+d=d_1$, $a^2-b^2+c^2+d=d_2$, $a^2+b^2-c^2+d=d_3$ とおくと,

$$BI = \frac{ad_2}{2(a^2+d)}, \quad IC = a - \frac{ad_2}{2(a^2+d)} = \frac{a\{2(a^2+d) - (a^2-b^2+c^2+d)\}}{2(a^2+d)} = \frac{a(a^2+b^2-c^2+d)}{2(a^2+d)} = \frac{ad_3}{2(a^2+d)}$$

$$\text{同様に, } CJ = \frac{bd_3}{2(b^2+d)}, \quad JA = \frac{bd_1}{2(b^2+d)}, \quad AK = \frac{cd_1}{2(c^2+d)}, \quad KB = \frac{cd_2}{2(c^2+d)}$$



次に、メネラウスの定理により、 $\frac{AP}{PI} \cdot \frac{IB}{BC} \cdot \frac{CJ}{JA} = 1$ $\frac{AP}{PI} \cdot \frac{\frac{ad_2}{2(a^2+d)}}{a} \cdot \frac{\frac{bd_3}{2(b^2+d)}}{\frac{bd_1}{2(b^2+d)}} = 1$

$$\therefore \frac{AP}{PI} = \frac{2(a^2+d)d_1}{d_2d_3}, \quad \frac{PI}{AI} = \frac{d_2d_3}{2(a^2+d)d_1+d_2d_3}$$

ここで、 $2(a^2+d)d_1+d_2d_3 = 2(a^2+d)(-a^2+b^2+c^2+d) + (a^2-b^2+c^2+d)(a^2+b^2-c^2+d)$

$$= 2(d^2-a^4) + 2a^2(b^2+c^2) + 2(b^2+c^2)d + (a^2+d)^2 - (b^2-c^2)^2$$

$$= 3d^2 + 2(a^2+b^2+c^2)d + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

$$= 3d^2 + 2(a^2+b^2+c^2)d + (4S)^2$$

これは、 a, b, c について対称式であるから定数となる。

$$2(a^2+d)d_1+d_2d_3 = 2(b^2+d)d_2+d_3d_1 = 2(c^2+d)d_3+d_1d_2 = e \text{ とおくと, } \frac{PI}{AI} = \frac{d_2d_3}{e}$$

$$\triangle PBC = \frac{PI}{AI} \cdot S = \frac{d_2d_3S}{e} = \frac{1}{2}a \cdot PL \text{ より, } PL = \frac{2d_2d_3S}{ae} \quad \text{同様に, } PM = \frac{2d_3d_1S}{be}, \quad PN = \frac{2d_1d_2S}{ce}$$

$$\triangle PMN = \frac{1}{2} PM \cdot PN \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{2d_3d_1S}{be} \cdot \frac{2d_1d_2S}{ce} \cdot \frac{2S}{bc} = \frac{4d_1^2d_2d_3S^3}{b^2c^2e^2}$$

$$\text{同様に, } \triangle PNL = \frac{4d_1d_2^2d_3S^3}{c^2a^2e^2}, \quad \triangle PLM = \frac{4d_1d_2d_3^2S^3}{a^2b^2e^2}$$

$$\triangle LMN = \triangle PMN + \triangle PNL + \triangle PLM = \frac{4d_1^2d_2d_3S^3}{b^2c^2e^2} + \frac{4d_1d_2^2d_3S^3}{c^2a^2e^2} + \frac{4d_1d_2d_3^2S^3}{a^2b^2e^2}$$

$$= \frac{4d_1d_2d_3(a^2d_1+b^2d_2+c^2d_3)S^3}{a^2b^2c^2e^2}$$

ここで、 $a^2d_1+b^2d_2+c^2d_3 = a^2(-a^2+b^2+c^2+d) + b^2(a^2-b^2+c^2+d) + c^2(a^2+b^2-c^2+d)$

$$= (a^2+b^2+c^2)d + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

$$= (a^2+b^2+c^2)d + (4S)^2 \text{ であるから}$$

$$\triangle LMN = \frac{4d_1d_2d_3[(a^2+b^2+c^2)d + (4S)^2]S^3}{a^2b^2c^2e^2}$$

$\triangle DEF \sim \triangle LMN$ で、相似比は2:1であるから、 $\triangle DEF = 4 \times \triangle LMN$

よって、

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = 4 \times \frac{4d_1d_2d_3[(a^2+b^2+c^2)d + (4S)^2]S^2}{a^2b^2c^2e^2}$$

$$= \frac{(4S)^2(-a^2+b^2+c^2+d)(a^2-b^2+c^2+d)(a^2+b^2-c^2+d)[(a^2+b^2+c^2)d + (4S)^2]}{a^2b^2c^2[3d^2 + 2(a^2+b^2+c^2)d + (4S)^2]^2}$$

$$= \frac{(-a^2+b^2+c^2+d)(a^2-b^2+c^2+d)(a^2+b^2-c^2+d)[(a^2+b^2+c^2)d + (4S)^2]}{R^2[3d^2 + 2(a^2+b^2+c^2)d + (4S)^2]^2} \quad \text{答}$$

補足

(1) $\theta = 60^\circ$ のとき、Kiepert点は8.のFermat点の場合に一致する。上式に、 $d = \frac{4S}{\tan 60^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}S$ を代入する。

$$\text{分子の } \{ \} \text{ の中} = (a^2+b^2+c^2) \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}} + (4S)^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)$$

$$\text{分母の } \{ \} \text{ の中} = 3 \cdot \left(\frac{4S}{\sqrt{3}} \right)^2 + 2(a^2+b^2+c^2) \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}} + (4S)^2 = 2 \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}}(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S)$$

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{(4S)^2 \left(-a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4S}{\sqrt{3}} \right) \left(a^2 - b^2 + c^2 + \frac{4S}{\sqrt{3}} \right) \left(a^2 + b^2 - c^2 + \frac{4S}{\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S)}{a^2 b^2 c^2 \left\{ 2 \cdot \frac{4S}{\sqrt{3}} (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S) \right\}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}S \left(-a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S \right) \left(a^2 - b^2 + c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S \right) \left(a^2 + b^2 - c^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}S \right)}{a^2 b^2 c^2 (a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S)}$$

これで、8. (Fermat点の場合) の結果と一致することが確かめられた。

(2019/10/5 時図)

12. $\triangle ABC$ の外接円の半径を R , PD , PE , PF の中点をそれぞれ L , M , N とする。

$\triangle DEF \sim \triangle LMN$ で、相似比は $2:1$ であるから、

$$\triangle DEF = 4 \times \triangle LMN$$

まず、 $\triangle LMN$ の面積を求める。

$\angle LMN = \theta$ とおく。

四角形 $ANPM$ は、 $\angle AMP + \angle ANP = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ より円に内接する。

$\triangle AMN$ に正弦定理を適用すると、 $\frac{MN}{\sin A} = AP$ (直径)

$$\therefore MN = AP \sin A$$

同様に、四角形 $CMPL$ は円に内接するから、 $LM = CP \sin C$

$$\triangle LMN = \frac{1}{2} LM \cdot MN \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot CP \sin C \cdot AP \sin A \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} AP \cdot CP \sin \theta \sin A \sin C \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで、 AP の延長と外接円との交点を G とする。

四角形 $ANPM$ および四角形 $CMPL$ は円に内接し、円周角は等しいから

$$\angle GCP = \angle GCB + \angle BCP = \angle GAB + \angle LCP = \angle PAN + \angle LCP = \angle PMN + \angle LMP = \angle LMN = \theta$$

$\angle CGP = \angle CGA = \angle CBA = B$ であるから、 $\triangle PGC$ に正弦定理を適用すると、 $\frac{CP}{\sin B} = \frac{PG}{\sin \theta}$

$$\therefore CP \sin \theta = PG \sin B \quad \text{これを}\textcircled{1}\text{に代入すると、}\triangle LMN = \frac{1}{2} AP \cdot PG \sin B \cdot \sin A \sin C \quad \cdots \textcircled{2}$$

また、直線 OP と外接円の交点を図のように I , J とすると、

方べきの定理より、 $AP \cdot PG = IP \cdot PJ = (R - d)(R + d) = R^2 - d^2$ であるから、 $\textcircled{2}$ に代入すると、

$$\triangle LMN = \frac{1}{2} (R^2 - d^2) \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{2} (R^2 - d^2) \sin A \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \frac{R^2 - d^2}{4R^2} \cdot \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{R^2 - d^2}{4R^2} \cdot S$$

$\cdots \textcircled{3}$

$$\text{よって、}\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{4 \cdot \triangle LMN}{S} = \frac{R^2 - d^2}{R^2} \quad \text{終}$$

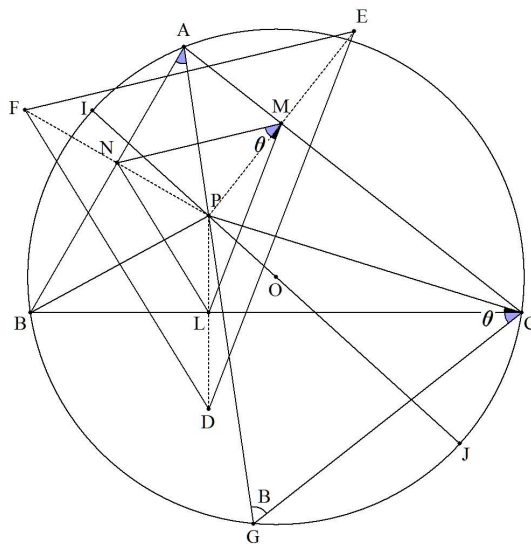
補足

(1) 点 P が外接円周上にあるとき、 $OP = R$ より、 $\triangle LMN = 0$

これは、 $\triangle LMN$ がつぶれて、3点 L , M , N が一直線上にあることを示している。(シムソン線)

定理 (Simsonの定理)

三角形の外接円周上の任意の1点 P から3辺 BC , CA , AB に垂線 PD , PE , PF を下せば、3点 D , E , F は1直線上にある。この直線を $\triangle ABC$ に関する点 P のSimson線という。



(2) 点 P が内心のとき, $(s = \frac{a+b+c}{2})$

$$\triangle LMN = \triangle IMN + \triangle INL + \triangle ILM = \frac{1}{2}r^2\{\sin(180^\circ - A) + \sin(180^\circ - B) + \sin(180^\circ - C)\}$$

$$= \frac{1}{2}r^2\left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}\right) = \frac{r \cdot rs}{2R} = \frac{r}{2R} \cdot S$$

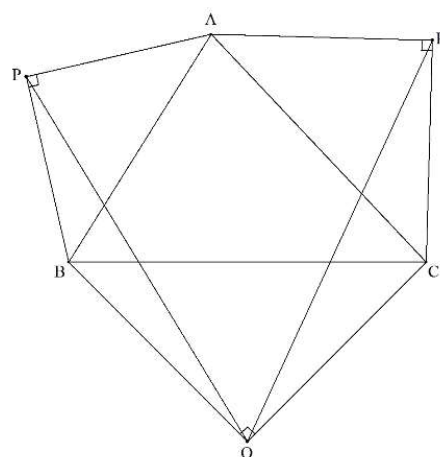
③より, $\frac{r}{2R} \cdot S = \frac{R^2 - d^2}{4R^2} \cdot S \quad d^2 = R^2 - 2Rr \quad \therefore IO^2 = R^2 - 2Rr$ (オイラー・チャップルの定理)

【12.の参考文献】 数学ひとり旅 数学=不思議発見 石谷茂著 現代数学社 1998年10月31日1刷発行

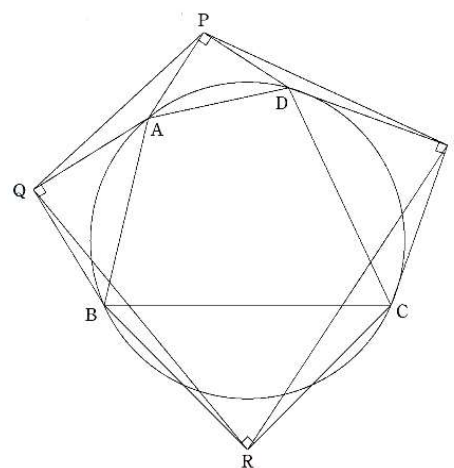
(2019/10/9 時岡)

(追加) 三角形, 四角形のある面積に関する性質

1. $\triangle ABC$ の外側に各辺を底辺とする直角二等辺三角形 PBA , QCB , RAC をつくる。
四角形 $APQR - \triangle ABC$ の値は定数となる。



2. 円に内接する四角形 $ABCD$ の外側に各辺を底辺とする直角二等辺三角形 PAD , QBA , RCB , SDC をつくる。
四角形 $PQRS -$ 四角形 $ABCD$ の値は定数となる。



(2019/11/16 時岡)