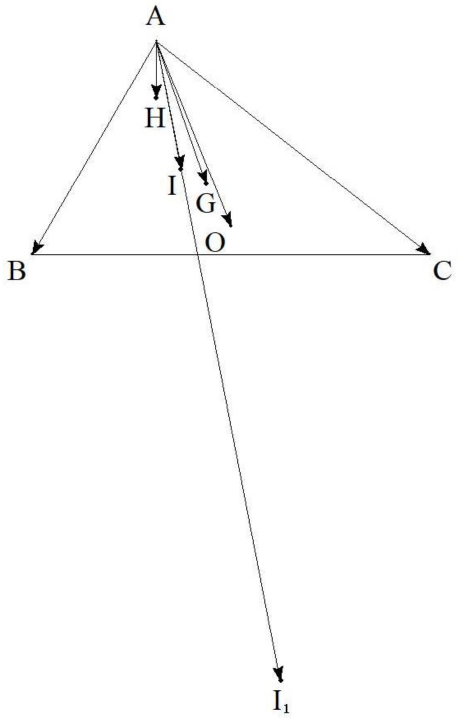
三角形の五心の位置ベクトルと内積



△ABCの重心，垂心，内心，外心，∠A内の傍心をそれぞれ

G，H，I，O，I_1 とする。

[1]　次のベクトルを，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{AG}$

(2)　$\overrightarrow{AH}$

(3)　$\overrightarrow{AI}$

(4)　$\overrightarrow{AO}$

(5)　$\overrightarrow{AI_1}$

[2]　次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(2)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AI}$

(3)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AO}$　　(4)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AI_1}$

(5)　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}$　　(6)　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AO}$

(7)　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI_1}$　　(8)　$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AO}$

(9)　$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AI_1}$　　(10)　$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AI_1}$

解答

[1]　$|\vec{b}|=c$，$|\vec{c}|=b$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos A=cb\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ である。

(1)　$\overrightarrow{AG}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$　答

(2)　AHとBCの交点をDとすると，BD$=c\cos B$，DC$=b\cos C$

$$\overrightarrow{AD}=\frac{b\cos C\vec{b}+c\cos B\vec{c}}{a}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\vec{b}+\frac{c}{a}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\vec{c}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}\vec{b}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}\vec{c}$$

$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AD}$ とおくと，$\overrightarrow{AH}=k\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}\vec{b}+k\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}\vec{c}$

$$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}k\vec{b}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}k\vec{c}-\vec{b}=\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}k-1\right)\vec{b}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}k\vec{c}$$

$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BH}$ であるから，$\vec{c}\cdot\overrightarrow{BH}=0$ より，$\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}k-1\right)\vec{b}\cdot\vec{c}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}k|\vec{c}|^2=0$

ここで，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$，$|\vec{c}|=b$ であるから，

$$\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a^2}k-1\right)\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2a^2}kb^2=0$$

ここで，△ABC$=S$ とおくと，$(4S)^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ であるから，$k=\dfrac{2a^2(b^2+c^2-a^2)}{(4S)^2}$

よって，$\overrightarrow{AH}=\dfrac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{(4S)^2}\vec{b}+\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}\vec{c}$　答

別解　$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とおく。

$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ より，

$(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0 \quad (s-1)\vec{b}\cdot\vec{c}+t\vec{c}\cdot\vec{c}=0 \quad (s-1)\cdot bc\cos A+tb^2=0 \quad \therefore s+\dfrac{b}{c\cos A}t=1 \quad \cdots①$

同様に，$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ より，

$(s\vec{b}+t\vec{c}-\vec{c})\cdot\vec{b}=0 \quad s\vec{b}\cdot\vec{b}+(t-1)\vec{c}\cdot\vec{b}=0 \quad sc^2+(t-1)\cdot bc\cos A=0 \quad \therefore \dfrac{c}{b\cos A}s+t=1 \quad \cdots②$

②$\times\dfrac{b}{c\cos A}$ −①より，$\left(\dfrac{1}{\cos^2 A}-1\right)s=\dfrac{b}{c\cos A}$

$s\tan^2 A=\dfrac{b-c\cos A}{c\cos A}=\dfrac{a\cos C}{c\cos A}=\dfrac{\sin A\cos C}{\sin C\cos A}=\dfrac{\tan A}{\tan C} \quad \therefore s=\dfrac{1}{\tan A\tan C}$

同様に，①$\times\dfrac{c}{b\cos A}$ −②より，$t=\dfrac{1}{\tan A\tan B}$

よって，$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\vec{b}}{\tan A\tan C}+\dfrac{\vec{c}}{\tan A\tan B}$ 答

補足　$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\dfrac{2S}{bc}}{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\dfrac{4S}{b^2+c^2-a^2}$ 等を代入すると，解答と同じ結果になる。

(3)　AI と BC の交点を E とすると，BE : EC= $c:b$ であるから，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{c+b}$

AI : IE= $c:\dfrac{c}{b+c}a=(b+c):a$ であるから，$\overrightarrow{AI}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\times\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{b+c}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$ 答

(4)　AO と 外接円との交点を F とし，$\overrightarrow{AO}=k\vec{b}+l\vec{c}$ とおくと，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AO}=2k\vec{b}+2l\vec{c}$

$\angle ABF=90^\circ$ より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BF}=0 \quad \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB})=0 \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AB}|^2$

$\vec{b}\cdot(2k\vec{b}+2l\vec{c})=c^2 \quad 2kc^2+2l\times bc\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c^2 \quad 2c^2k+(b^2+c^2-a^2)l=c^2 \quad \cdots①$

同様に，$\angle ACF=90^\circ$ より，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CF}=0 \quad \overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC})=0 \quad \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=|\overrightarrow{AC}|^2$

$\vec{c}\cdot(2k\vec{b}+2l\vec{c})=b^2 \quad 2k\times bc\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+2lc^2=b^2 \quad (b^2+c^2-a^2)k+2c^2l=b^2 \quad \cdots②$

①，②を連立させて，$k=\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}$，$l=\dfrac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{(4S)^2}$

よって，$\overrightarrow{AO}=\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}\vec{b}+\dfrac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{(4S)^2}\vec{c}$ 答

(5)　$\overrightarrow{AI_1}$ は $\overrightarrow{AI}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$ と向きが等しい単位ベクトルの AI_1 倍である。

I，I_1 から AB に下した垂線の足をそれぞれ J，K とすると，AJ= $s-a$，AK= s である。

$\triangle AJI \backsim \triangle AKI_1$ であるから，$\dfrac{s-a}{AI}=\dfrac{s}{AI_1}$ より，$AI_1=\dfrac{s}{s-a}$ AI となる。

よって，$\overrightarrow{AI_1}=AI_1\cdot\dfrac{\overrightarrow{AI}}{AI}=\dfrac{s}{s-a}AI\cdot\dfrac{\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}}{AI}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{b+c-a}$ 答

[2]　[1] の結果をまとめると，

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{(4S)^2}\vec{b}+\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$，

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}\vec{b}+\dfrac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{(4S)^2}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{b+c-a}$ である。

また，$|\vec{b}|=c$，$|\vec{c}|=b$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$ に注意して，各内積を計算すると次の通りとなる。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{3}$ 答

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{(b+c)(b+c-a)}{6}$ 答

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{b^2+c^2}{6}$ 答

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}=\dfrac{(b+c)(a+b+c)}{6}$ 答

(5) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2(a+b+c)}$ 答

(6) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)\{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2\}}{2(4S)^2}$ 答

(7) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}=\dfrac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2(b+c-a)}$ 答

(8) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{bc(b+c)}{2(a+b+c)}$ 答

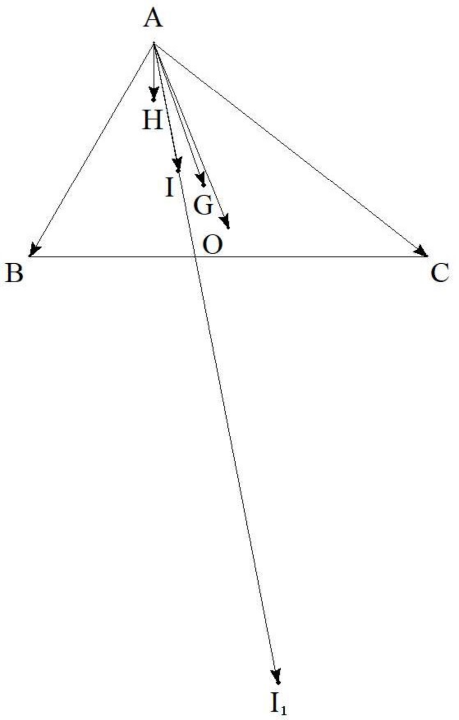
(9) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}=bc$ 答

(10) $\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AI_1}}=\dfrac{bc(b+c)}{2(b+c-a)}$ 答

（2020/6/15　時岡）

（2021/3/3　時岡）

△ABCの重心，垂心，内心，外心，∠A内の傍心をそれぞれG，H，I，O，I_1とする。



[1]　次のベクトルを，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{AG}$

(2)　$\overrightarrow{AH}$

(3)　$\overrightarrow{AI}$

(4)　$\overrightarrow{AO}$

(5)　$\overrightarrow{AI_1}$

[2]　次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH}$　　(2)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AI}$

(3)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AO}$　　(4)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AI_1}$

(5)　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}$　　(6)　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AO}$

(7)　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI_1}$　　(8)　$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AO}$

(9)　$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AI_1}$　　(10)　$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AI_1}$

[1]　$(4S)^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ とおく。

(1)　$\overrightarrow{AG}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$

(2)　$\overrightarrow{AH}=\dfrac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{(4S)^2}\vec{b}+\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{AI}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}$，

(4)　$\overrightarrow{AO}=\dfrac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{(4S)^2}\vec{b}+\dfrac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{(4S)^2}\vec{c}$

(5)　$\overrightarrow{AI_1}=\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{b+c-a}$

[2]

(1)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AH}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{3}$　　(2)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AI}=\dfrac{(b+c)(b+c-a)}{6}$

(3)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{b^2+c^2}{6}$　　(4)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AI_1}=\dfrac{(b+c)(a+b+c)}{6}$

(5)　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI}=\dfrac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2(a+b+c)}$　　(6)　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)\{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2\}}{2(4S)^2}$

(7)　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AI_1}=\dfrac{(b+c)(b^2+c^2-a^2)}{2(b+c-a)}$　　(8)　$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AO}=\dfrac{bc(b+c)}{2(a+b+c)}$

(9)　$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AI_1}=bc$　　(10)　$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AI_1}=\dfrac{bc(b+c)}{2(b+c-a)}$

（2020/6/15 初稿，2021/3/3 加筆　時岡）