

三角形の五心間のそれぞれの距離について

1 問題設定

三角形 ABC の五心である重心, 垂心, 内心, 外心, 傍心 (代表して, $\angle A$ 内の傍心) について, それぞれの 2 点間の距離を求める。 ${}_5C_2 = 10$ であるから, 10 通りの長さを計算することになる。単純計算 (2 点間の距離の公式) で求められるように, 座標平面で考える。

$A(0,0)$, $B(c,0)$, $C(b \cos A, b \sin A)$ とおく。

$\frac{a+b+c}{2} = s$ とおき, 余弦定理と面積の公式 (ヘロンの公式) より,

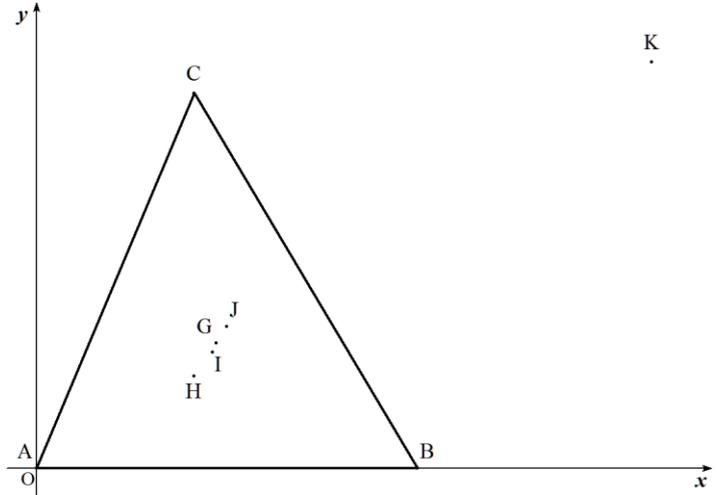
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2bc}$$

であるから

$$C \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}, \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2c} \right) \text{ となる。}$$

また, $\triangle ABC$ の内接円, 外接円の半径をそれぞれ r, R とおく。



2 五心の各座標について

いま, 重心, 垂心, 内心, 外心, $\angle A$ 内の傍心をそれぞれ, $G(x_1, y_1)$, $H(x_2, y_2)$, $I(x_3, y_3)$, $J(x_4, y_4)$, $K(x_5, y_5)$ とおく。また, AB の中点を $D\left(\frac{c}{2}, 0\right)$, I, K から AB に下ろした垂線の足をそれぞれ E, F とする。

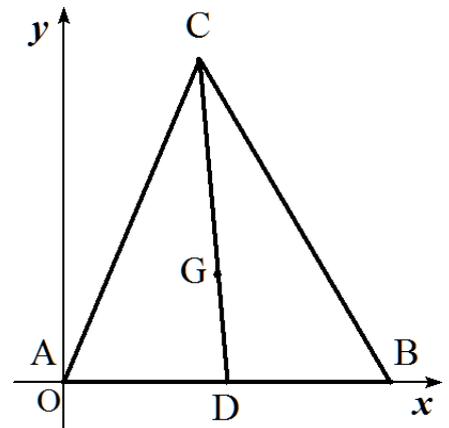
(1) 重心

G は中線 CD を 2:1 に内分する点であるから

$$x_1 = \frac{1 \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} + 2 \times \frac{c}{2}}{2+1} = \frac{b^2 + 3c^2 - a^2}{6c}$$

$$y_1 = \frac{1 \times \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2c} + 2 \times 0}{2+1} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{6c}$$

$$\text{よって, } G \left(\frac{b^2 + 3c^2 - a^2}{6c}, \frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{6c} \right)$$



(2) 垂心

直線 AH は、点 A (原点) を通り、BC に垂直であるから、その方程式は

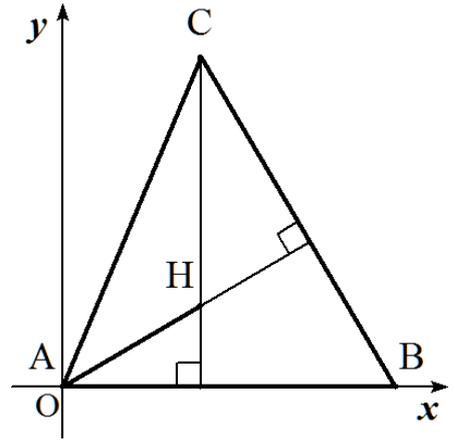
$$y = -\frac{c - b \cos A}{0 - b \sin A} x = \frac{c - b \cos A}{b \sin A} x \cdots \textcircled{1}$$

H の x 座標は C と同じだから、 $x_2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$,

H の y 座標は、①より

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{c - b \cos A}{b \sin A} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \\ &= \frac{2c^2 - 2ab \cos A}{2bc \sin A} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = \frac{2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)}{4S} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \\ &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{2c\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}} \end{aligned}$$

よって、 $H \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}, \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{2c\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}} \right)$

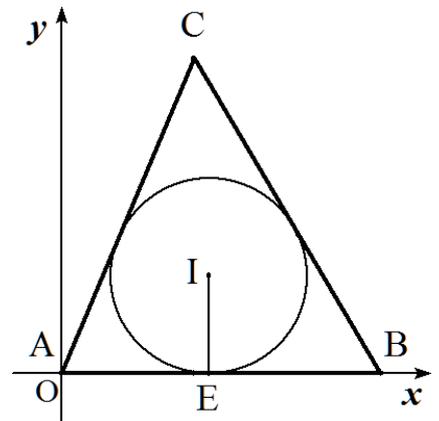


(3) 内心

$$x_3 = AE = s - a = \frac{-a + b + c}{2}$$

$$y_3 = IE = r = \frac{S}{s} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{a + b + c}}$$

よって、 $I \left(\frac{-a + b + c}{2}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)}{a + b + c}} \right)$



(4) 外心

$$x_4 = AD = \frac{c}{2}$$

AJ = R で、△JAD は直角三角形であるから、 $JD = \sqrt{R^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$

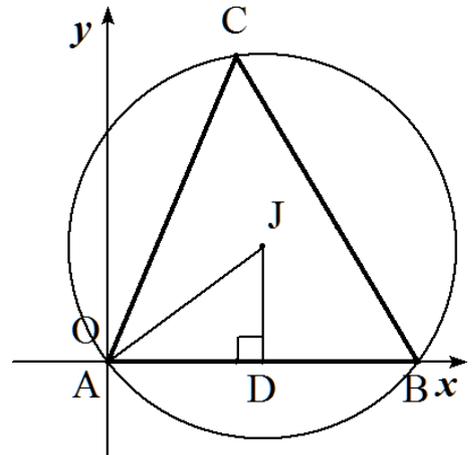
ここで、 $2R = \frac{a}{\sin A}$, $S = \frac{1}{2} bc \sin A$ より $R = \frac{abc}{4S}$

$$y_4 = JD = \sqrt{\left(\frac{abc}{4S}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 b^2 c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} - \frac{c^2}{4}}$$

$$= \frac{c\sqrt{4a^2 b^2 - (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{2\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}} = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

よって、 $J \left(\frac{c}{2}, \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}} \right)$



(5) $\angle A$ 内の傍心

$$x_5 = AF = s = \frac{a+b+c}{2}$$

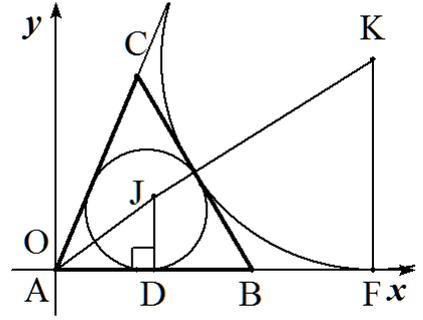
次に、 $AD = s - a$ で、 $\triangle ABC$ の $\angle A$ 内の傍接円の半径を r_1 とする。

$\triangle JAD \sim \triangle KAF$ であるから $r : r_1 = (s-a) : s$

$$r_1 = \frac{rs}{s-a} = \frac{S}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{-a+b+c}}$$

$$\therefore y_5 = KF = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{-a+b+c}}$$

よって、 $K\left(\frac{a+b+c}{2}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{-a+b+c}}\right)$



3 五心間のそれぞれの距離

2 点間の距離の公式に代入して計算した結果は、次の通りである。ただし、式を簡潔に表すために、

$$a^3 + b^3 + c^3 = \sum^3 a^3, a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 = \sum^6 a^2b \quad \text{等々と表記する。}$$

$$(1) \quad GH = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\sum^3 a^6 - \sum^6 a^4b^2 + 3a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

$$(2) \quad GI = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\sum^6 a^2b - \sum^3 a^3 - 9abc}{a+b+c}}$$

$$(3) \quad GJ = \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\sum^3 a^6 - \sum^6 a^4b^2 + 3a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

$$(4) \quad GK = \sqrt{(x_5 - x_1)^2 + (y_5 - y_1)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\sum^6 a^2b - \sum^3 a^3 + 9abc - 2a(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{-a+b+c}}$$

$$(5) \quad HI = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{\frac{\sum^3 a^6 - \sum^6 a^5b - \sum^6 a^4b^2 + 2\sum^3 a^3b^3 + 3\sum^3 a^4bc - 2\sum^6 a^3b^2c + 6a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

$$(6) \quad HJ = \sqrt{(x_4 - x_2)^2 + (y_4 - y_2)^2} = \sqrt{\frac{\sum^3 a^6 - \sum^6 a^4b^2 + 3a^2b^2c^2}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

$$(7) \quad HK = \sqrt{(x_5 - x_2)^2 + (y_5 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum^3 a^6 + \sum^6 a^5 b - \sum^6 a^4 b^2 - 2 \sum^3 a^3 b^3 - 3 \sum^3 a^4 b c + 2 \sum^6 a^3 b^2 c + 6 a^2 b^2 c^2 - 2 a^5 b - 2 a c^5 + 4 a^3 c^3 + 6 a b^4 c - 4 a^3 b^2 c - 4 a b^2 c^3}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

$$(8) \quad IJ = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} = \sqrt{\frac{abc \left(\sum^3 a^3 - \sum^6 a^2 b + 3abc \right)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

$$(9) \quad IK = \sqrt{(x_5 - x_3)^2 + (y_5 - y_3)^2} = 2a \sqrt{\frac{bc}{(a+b+c)(-a+b+c)}} = \frac{a}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$(10) \quad JK = \sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2} = \sqrt{\frac{abc \left(-\sum^3 a^3 + \sum^6 a^2 b + 3abc - 2a(b^2 + c^2 - a^2) \right)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}$$

4 具体例

BC=15, CA=14, AB=13 である△ABC の重心, 垂心, 内心, 外心, ∠A 内の傍心をそれぞれ G, H, I, J, K とする。

$$(1) \quad GH = \frac{\sqrt{265}}{12}$$

$$(2) \quad GI = \frac{1}{3}$$

$$(3) \quad GJ = \frac{\sqrt{265}}{24}$$

$$(4) \quad GK = \frac{2\sqrt{709}}{3}$$

$$(5) \quad HI = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$(6) \quad HJ = \frac{\sqrt{265}}{8}$$

$$(7) \quad HK = \frac{\sqrt{5777}}{4}$$

$$(8) \quad IJ = \frac{\sqrt{65}}{8}$$

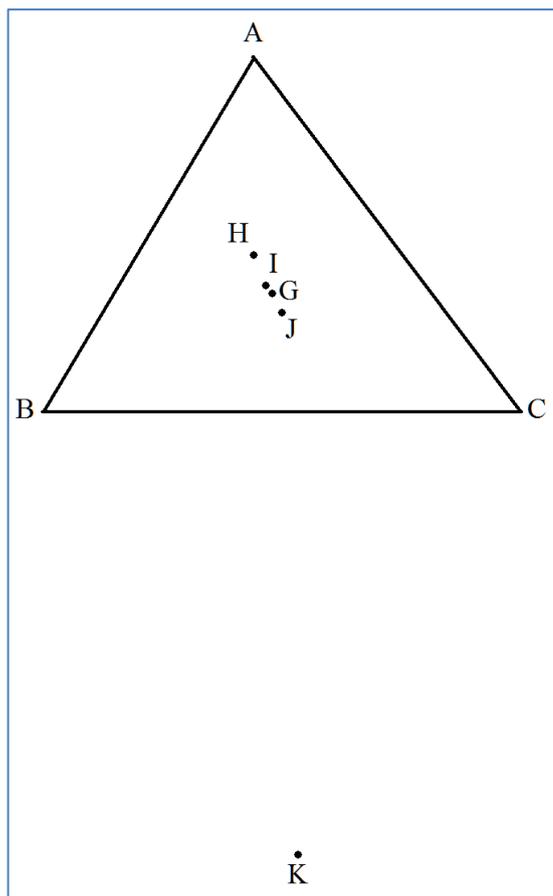
$$(9) \quad IK = 5\sqrt{13}$$

$$(10) \quad JK = \frac{17\sqrt{65}}{8}$$

(補足) L を ∠B 内の傍心とすると,

$$GL = \frac{\sqrt{2329}}{3}, \quad HL = \frac{\sqrt{4113}}{4},$$

$$IL = 2\sqrt{65}, \quad JL = \frac{\sqrt{16705}}{8} \text{ となる。}$$



5 終わりに

五心間のそれぞれの距離の結果からも, G は HJ を 2:1 に内分する点であるがわかる。

【参考文献】 特になし

(2017/5/8 時岡)