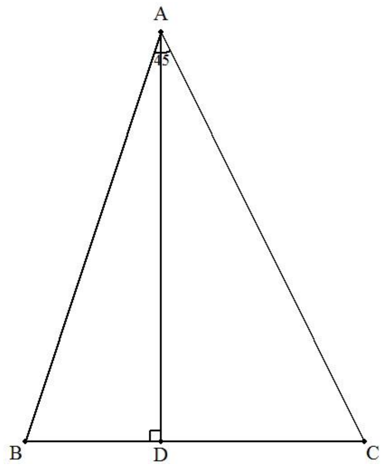
∠A＝45°の三角形の面積を求める問題の解法について

（問題）

∠A＝45°の三角形 ABC の頂点 A から対辺 BC に垂線 AD を引くと，

BD＝2 ，CD＝3 であった。このとき，三角形 ABC の面積を求めよ。



（解 1）【中学】（正方形で取り囲み，三平方の定理）■

△ABD≡△ABE となる点 E，および，△ACD≡△ACF となる点 F をとる。また，EB と FC の交点を G とすると，四角形 AEGF は正方形となる。

AD＝ $x(x>0)$ とおくと，

AE＝AF＝EG＝FG＝ x であるから

BG＝ $x-2$，CG＝ $x-3$

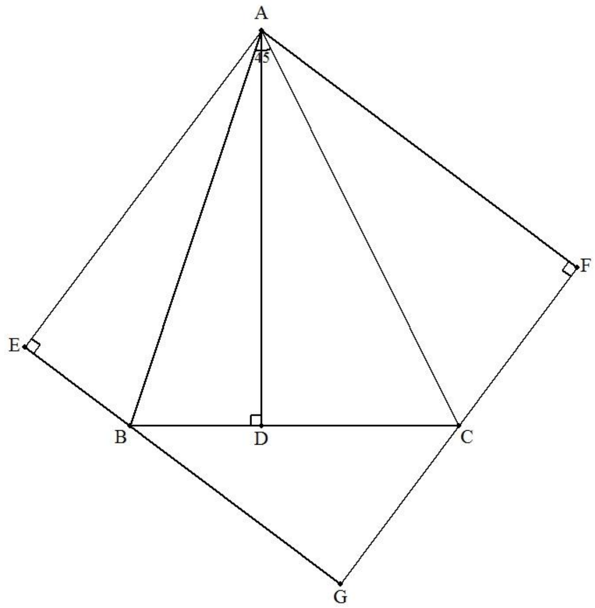
直角三角形 GCB に三平方の定理を適用すると

$$(x-2)^2+(x-3)^2=5^2$$

$$x^2-5x-6=0$$

$x>0$ より $x=6$

よって，面積は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15\cdots$（答）



【補足 1】一般に，BD＝ p ，CD＝ q のとき，AD＝ $x(x>0)$ とおくと，

BG＝ $x-p$，CG＝ $x-q$，BC＝ $p+q$ であるから，

直角三角形 GCB に三平方の定理を適用すると　$(x-p)^2+(x-q)^2=(p+q)^2$

$x^2-(p+q)x-pq=0$　　$x>0$ より $x=\dfrac{p+q+\sqrt{p^2+6pq+q^2}}{2}$

よって，面積は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot(p+q)\cdot\dfrac{p+q+\sqrt{p^2+6pq+q^2}}{2}=\dfrac{1}{4}(p+q)\left(p+q+\sqrt{p^2+6pq+q^2}\right)\cdots$（答）

（解 2）【中学】（正方形に内接する 45° 三角形の性質）

（解 1）の図で，正方形 AEGF の辺 EG，GF 上にそれぞれ点 B，C を∠BAC＝45° となるようにとると，

EB：BG＝GC：2CF であるから（※），$2:(x-2)=(x-3):2\times 3$　この比例式より　$x=6$

よって，面積は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15\cdots$（答）

（解 3）【中学】（外心と三平方の定理）■

△ABC の外心 P から BC，AD に下ろした垂線の足をそれぞれ M，H とすると，

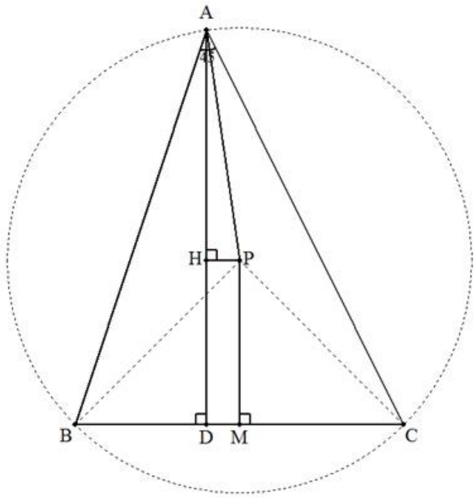
HD＝PM＝BM＝MC＝$\dfrac{5}{2}$ であるから，AP＝PM$\times\sqrt{2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

また，HP＝BM－BD＝$\dfrac{5}{2}-2=\dfrac{1}{2}$

AH＝$\sqrt{AP^2-HP^2}=\sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{7}{2}$

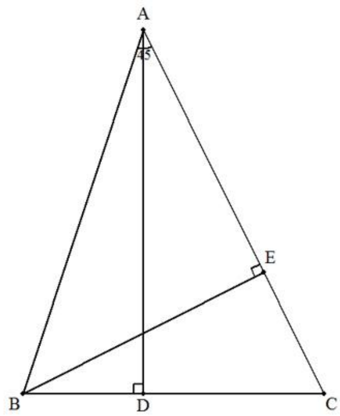
∴AD＝AH＋HD＝$\dfrac{7}{2}+\dfrac{5}{2}=6$

よって，面積は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6=15\cdots$（答）



（解 4）【中学】（三平方の定理）

AD＝$x(x>0)$ とおき，頂点 B から対辺 CA に下ろした垂線の足を E とする。



△ABD において，AB＝$\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{x^2+4}$

△ABE は直角二等辺三角形であるから，

BE＝AE＝$\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}$

△ACD において，AC＝$\sqrt{x^2+3^2}=\sqrt{x^2+9}$ であるから，

EC＝AC－AE＝$\sqrt{x^2+9}-\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}$

直角三角形 EBC において　EB＝$\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}$，EC＝$\sqrt{x^2+9}-\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}$，BC＝5 であるから，

$$\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{x^2+9}-\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}\right)^2=5^2$$

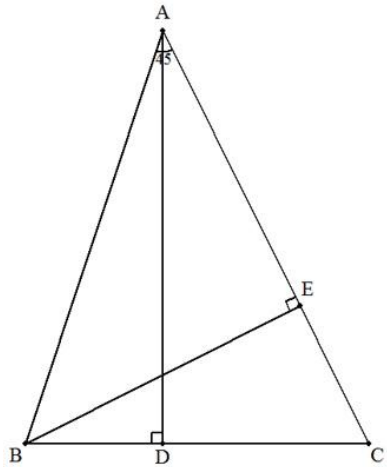
展開して整理すると　$\sqrt{2}\left(x^2-6\right)=\sqrt{\left(x^2+4\right)\left(x^2+9\right)}\cdots$①

両辺を 2 乗して整理すると，$x^4-37x^2+36=0$　　$\left(x^2-1\right)\left(x^2-36\right)=0$

① より，$x>\sqrt{6}$ であるから，$x=6$

よって，面積は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6=15\cdots$（答）

（解 5）【中学】（面積と三平方の定理）



AD＝$x(x>0)$とおき，頂点 B から対辺 CA に下ろした垂線の足を E とする。

△ABD，△ACD に三平方の定理を適用して

AB＝$\sqrt{x^2+2^2}=\sqrt{x^2+4}$，AC＝$\sqrt{x^2+3^2}=\sqrt{x^2+9}$

また，△ABE は直角二等辺三角形であるから，

BE＝AE＝$\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}$

△ABC の面積 S を考えると

S＝$\dfrac{1}{2}$AC・BE＝$\dfrac{1}{2}$BC・AD であるから，

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+9}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\cdot 5x$$

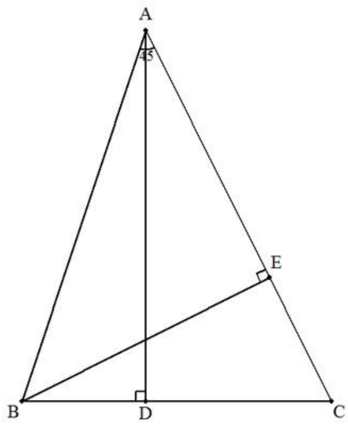
よって，$\sqrt{(x^2+4)(x^2+9)}=5\sqrt{2}x$

両辺を 2 乗して整理すると　$x^4-37x^2+36=0$　　$(x^2-1)(x^2-36)=0$

図より $x>3$ であるから，　$x=6$

よって，面積は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6=15\cdots$（答）

（解 6）【中学】（相似と三平方の定理）■



AD＝$x(x>0)$とおくと，

△ACD∽△BCE であるから，AC : BC＝x : BE より AC・BE＝xBC･･･①

ここで，AC＝$\sqrt{x^2+9}$，BC＝5,

△ABE は直角二等辺三角形であるから，BE＝AB÷$\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}$

①は，$\sqrt{x^2+9}\times\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}=5x$

両辺に $\sqrt{2}$ をかけ，両辺を 2 乗すると

$(x^2+9)(x^2+4)=50x^2$

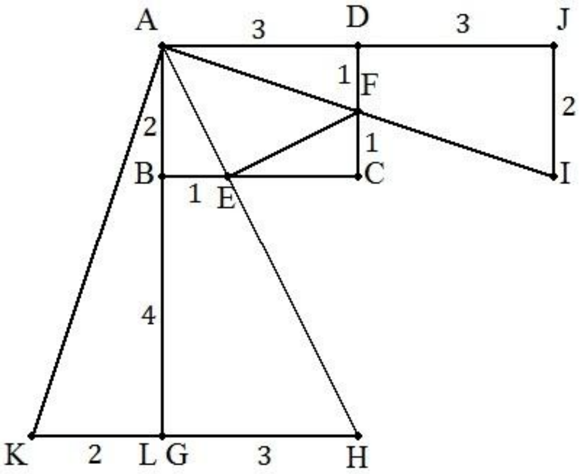
$x^4-37x^2+36=0$

$(x^2-1)(x^2-36)=0$

図より $x>3$ であるから，　$x=6$

よって，面積は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot6=15\cdots$（答）

（解 7）【中学】（相似）



縦 2，横 3 の長方形 ABCD について，BC 上に点 E を，BE＝1 となるように，また，CD 上に点 F を CF＝1 となるようにとる。このとき，

△ABE≡△ECF より AE＝EF･･･①，

また，∠EAB＝∠FEC･･･②　である。

ここで，

∠AEF＝180°　－（∠BEA＋∠FEC）

＝180°　－（∠BEA＋∠EAB）　∵②より

＝180°　－90°　＝90°

よって，△EFA は①と合わせて，直角二等辺三角形となるので，∠EAF＝45°　より∠EAB＋∠FAD＝45°　となる。

次に，△ABE を，A を相似の中心として 3 倍に拡大して△AGH に，同様に△AFD を，A を相似の中心として 2 倍に拡大して△AIJ とする。

このとき，AG＝AJ＝6，IJ＝2，GH＝3 であるから，△AIJ を，A を中心に 90°　時計回りに回転させると，△AKL となり，△AKH は与えられた問題の図と一致する。

よって，$S=\frac{1}{2}(KL+GH)\times AG=\frac{1}{2}\times 5\times 6=15\cdots$（答）

（解 8）【中学】（Ceva の定理）

B から CA に下ろした垂線の足を E，C から AB に下ろした垂線の足を F とする。

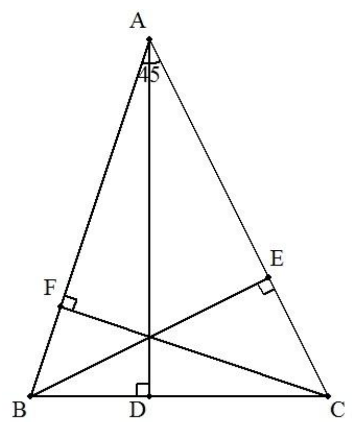
このとき，△ABE，△ACF は直角二等辺三角形になる。AD，BE，CF は一点で交わる（垂心）ので，Ceva の定理より

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

AD＝$x(x>0)$ とおくと

AF＝$\frac{\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{2}}$，FB＝$\sqrt{x^2+4}-\frac{\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{2}}$，AE＝$\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}$，EC＝$\sqrt{x^2+9}-\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{x^2+9}-\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4}-\frac{\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{2}}}=1$$



整理すると　$\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+9}=\sqrt{2}(x^2-6)\cdots$①

両辺を 2 乗して，$x^4-37x^2+36=0$

$(x^2-1)(x^2-36)=0$

①より，$x>\sqrt{6}$ であるから $x=6$

よって，面積は　$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15\cdots$（答）

（解 9）【高校】（正接の加法定理）■

AD＝ $x(x>0)$ とおき，∠BAD＝ α ，∠CAD＝ β とおくと，

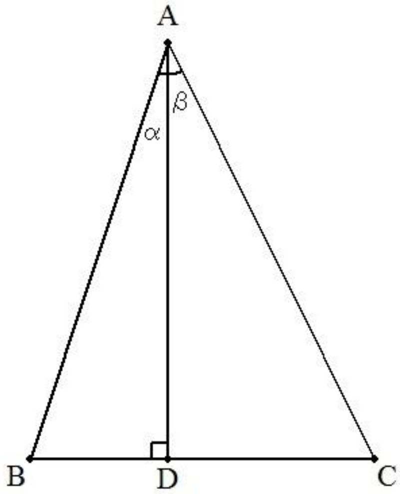
$\tan\alpha=\frac{2}{x},\tan\beta=\frac{3}{x},\tan(\alpha+\beta)=1$ である。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}\cdot\frac{3}{x}}=\frac{5x}{x^2-6}=1$$ より

$x^2-5x-6=0$

$x>0$ より　$x=6$

よって，面積は　$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=15\cdots$（答）



（解 10）【高校】（正接の関係式）■

AD＝ $x(x>0)$ とおく。

△ABC において，A＋B＋C＝180°　であるから，

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$　（※）

$1+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=1\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}$

$x^2-5x-6=0$

$(x-6)(x+1)=0,$

$x>0$より

$\therefore x=6$

よって，面積は　$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=15\cdots$（答）

（※）について

$A+B=180°-C$ より

$\tan(A+B)=\tan(180°-C)$

$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

分母を払うと

$\tan A+\tan B=-\tan C(1-\tan A\tan B)$

展開して整理すると

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

（解 11）【高校】（正弦定理）

AD＝ $x(x>0)$ とおく。

正弦定理より　$\frac{BC}{\sin45°}=\frac{AC}{\sin B}$

これに，AC＝ $\sqrt{x^2+9}$ ，$\sin B=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

を代入すると

$$\frac{5}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{x^2+9}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}$$

分母を払って整理すると

$5\sqrt{2}x=\sqrt{x^2+9}\sqrt{x^2+4}$

両辺を 2 乗すると

$50x^2=(x^2+9)(x^2+4)$

$x^4-37x^2+36=0$

$(x^2-1)(x^2-36)=0$

図より $x>3$ であるから，　$x=6$

よって，面積は

$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=15\cdots$（答）

（解 12）【高校】（正弦の加法定理）▲

解 8 の図で，AD＝ $x(x>0)$ とおくと，

$\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{x^2+4}},\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}},\sin\beta=\frac{3}{\sqrt{x^2+9}},\cos\beta=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ であるから

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{5x}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+9}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$ より

$\sqrt{x^2+9}\sqrt{x^2+4}=5\sqrt{2}x$

両辺を 2 乗し，整理すると　$x^4-37x^2+36=0$

図より $x>3$ であるから，　$x=6$

よって，面積は　$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15\cdots$（答）

（解 13）【高校】（面積 1）■

AD= $x(x>0)$ とおく。

面積 S について　$\frac{1}{2}bc\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot 5x$

$b=\sqrt{x^2+9}, c=\sqrt{x^2+4}$ であるから

$\sqrt{x^2+9}\sqrt{x^2+4}=5\sqrt{2}x$

両辺を 2 乗すると

$(x^2+9)(x^2+4)=50x^2$

$x^4-37x^2+36=0$

$(x^2-1)(x^2-36)=0$

図より $x>3$ であるから，　$x=6$

よって，面積は　$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15\cdots$（答）

（解 14）【高校】（面積 2）■

AD= $x(x>0)$ とおく。

面積 S について　$\frac{1}{2}bc\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot 5b\sin C$

$c=\sqrt{x^2+4}, \sin C=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ であるから

$\sqrt{x^2+4}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=5\times\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$

分母を払って，両辺を 2 乗すると

$(x^2+9)(x^2+4)=50x^2$

$x^4-37x^2+36=0$

$(x^2-1)(x^2-36)=0$

図より $x>3$ であるから，　$x=6$

よって，面積は　$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15\cdots$（答）

（解 15）【高校】（面積と余弦定理）■

AD= $x(x>0)$ とおく。

面積 S について　$\frac{1}{2}bc\sin 45^\circ=\frac{1}{2}\cdot 5x$

$\therefore bc=5\sqrt{2}x\cdots$①

余弦定理より　$5^2=b^2+c^2-2bc\cos 45^\circ$

これに①と $b=\sqrt{x^2+9}, c=\sqrt{x^2+4}$ を代入すると

$25=(x^2+9)+(x^2+4)-2\times 5\sqrt{2}x\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x^2-5x-6=0$

$(x-6)(x+1)=0$

$x>0$ より $x=6$

よって，面積は　$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15\cdots$（答）

（解 16）【高校】（第 1 余弦定理）▲

AD= $x(x>0)$ とおく。

第 1 余弦定理より

$\mathrm{BC}\cos C+\mathrm{BA}\cos 45^\circ=\mathrm{AC}$

$5\times\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}+\sqrt{x^2+4}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{x^2+9}$

分母を払って整理すると

$\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+9}=\sqrt{2}(x^2-6)\cdots$①

両辺を 2 乗して整理すると，　$x^4-37x^2+36=0$

$(x^2-1)(x^2-36)=0$

①より，　$x>\sqrt{6}$ であるから $x=6$

よって，面積は　$S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15\cdots$（答）

（解 17）【高校】（座標平面）▲

図のように△ABC を座標平面上に置くと，

$A(0,x)\ (x>0)$，$B(-2,0)$，

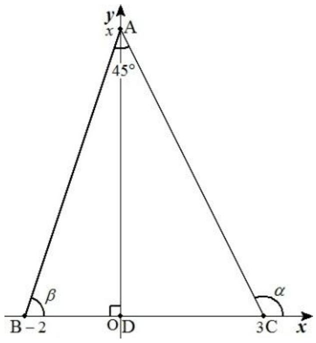
$C(3,0)$ となる。

∠ x CA＝ α とおくと，

$$\tan\alpha=-\frac{x}{3}$$

∠ x BA＝ β とおくと，

$$\tan\beta=\frac{x}{2}$$



図より，$\alpha-\beta=45°$ であるから，$\tan(\alpha-\beta)=1$

$$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{x}{3}-\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{3}\cdot\frac{x}{2}}=\frac{-5x}{6-x^2}=1$$

$-5x=6-x^2$

$x^2-5x-6=0$

$x>0$ であるから，$x=6$

よって，面積は　$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=15\cdots$（答）

（解 18）【高校】（ベクトル）▲　下図において

AD$=x(x>0)$，$\overrightarrow{AB}=(2,x)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,x)$ とおくと，

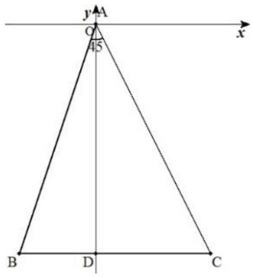
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot(-3)+x\cdot x=x^2-6\cdots①$$

また，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos45°=\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+9}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

この式と①より　$x^2-6=\frac{\sqrt{(x^2+4)(x^2+9)}}{\sqrt{2}}\cdots②$

両辺に $\sqrt{2}$ をかけ，両辺を 2 乗すると



$2(x^2-6)^2=(x^2+4)(x^2+9)$

$x^4-37x^2+36=0$

$(x^2-1)(x^2-36)=0$

②より，$x>\sqrt{6}$ であるから $x=6$

よって，面積は　$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=15\cdots$（答）

（解 19）【高校】（複素平面）▲

右図において，

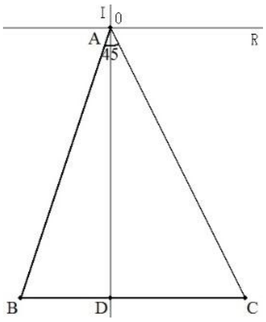
$z_1=-2-xi, z_2=3-xi$　（$x>0$）とおくと，

A(0)，B(z_1)，C(z_2)と表すことができる。

仮定より

$$\frac{z_2}{|z_2|}=\frac{z_1}{|z_1|}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{3-xi}{\sqrt{9+x^2}}=\frac{-2-xi}{\sqrt{4+x^2}}\cdot\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$



複素数の相等より

$$\frac{3}{\sqrt{9+x^2}}=\frac{-2+x}{\sqrt{2}\sqrt{4+x^2}},\ \frac{-x}{\sqrt{9+x^2}}=\frac{-2-x}{\sqrt{2}\sqrt{4+x^2}}$$

分母を払い，両辺を 2 乗して整理すると，共に

$x^4-4x^3-5x^2-36x-36=0$ となる。

因数分解すると

$(x+1)(x-6)(x^2+x+6)=0$

$x>0$ であるから，$x=6$

よって，面積は　$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=15\cdots$（答）

（解 20）【高校】（余弦の加法定理）

解 11 と同様に

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\cdot\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$=\frac{x^2-6}{\sqrt{x^2+4}\sqrt{x^2+9}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

より

$$\sqrt{2}(x^2-6)=\sqrt{x^2+9}\sqrt{x^2+4}$$

両辺を 2 乗し，整理すると　$x^4-37x^2+36=0$

図より $x>3$ であるから，$x=6$

よって，面積は　$S=\frac{1}{2}\cdot5\cdot6=15\cdots$（答）

【補足 2】（問題の一般化）■

> $\tan A = t$ の三角形 ABC の頂点 A から対辺 BC に垂線 AD を引く。 BD＝p ，CD＝q のとき，三角形 ABC の面積を求めよ。

（解）AD＝$x(x>0)$ とおく。

$\tan A = t, BD = p, CD = q$ のとき

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ より

$$t + \frac{x}{p} + \frac{x}{q} = t \cdot \frac{x}{p} \cdot \frac{x}{q}$$

$$tx^2 - (p+q)x - pqt = 0$$

$x > 0$ より

$$x = \frac{p+q+\sqrt{(p+q)^2 + 4pqt^2}}{2t}$$

よって

$$S = \frac{1}{2}(p+q) \times \frac{p+q+\sqrt{(p+q)^2+4pqt^2}}{2t}$$

$$= \frac{p+q}{4t}\left\{p+q+\sqrt{(p+q)^2+4pqt^2}\right\} \quad \cdots (\text{答})$$

【補足 3】

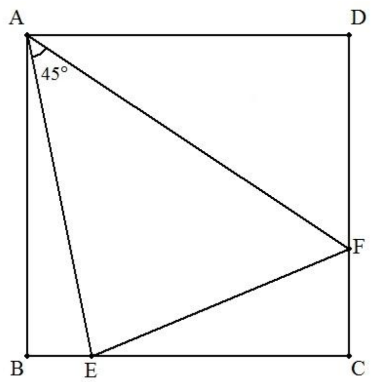
p, q, x が正の整数になる例（ただし，$p<q<100$）

p	q	x
2	3	6
3	10	15
4	21	26
5	12	20
5	36	45
6	55	66
7	30	42
7	78	91
9	56	72
11	90	110
14	15	35

p	q	x
18	35	63
21	44	77
22	63	99
24	65	104
26	99	143
33	40	88
39	70	130
45	52	117
60	77	165
84	85	204

（※）

正方形 ABCD の辺 BC，CD 上にそれぞれ点 E，F を，∠EAF=45° となるようにとると，BE : CE＝CF : 2DF となる。



◎証明は，拙者の HP「趣味の数学問題集」A 問題 115(5)にあり。

【参考文献】

1. 初等数学第 45 号（2002 年 10 月おみなえし号，松田康雄編）（■：解答掲載，▲：解法のみ）

（2012/11/28　時岡）