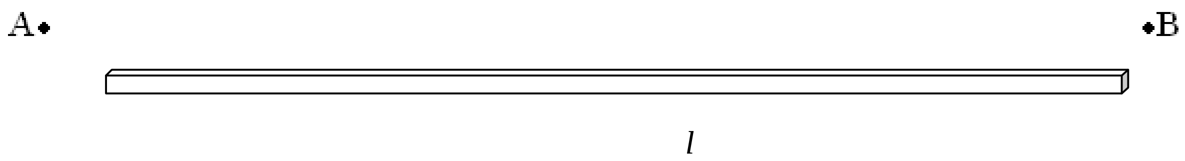
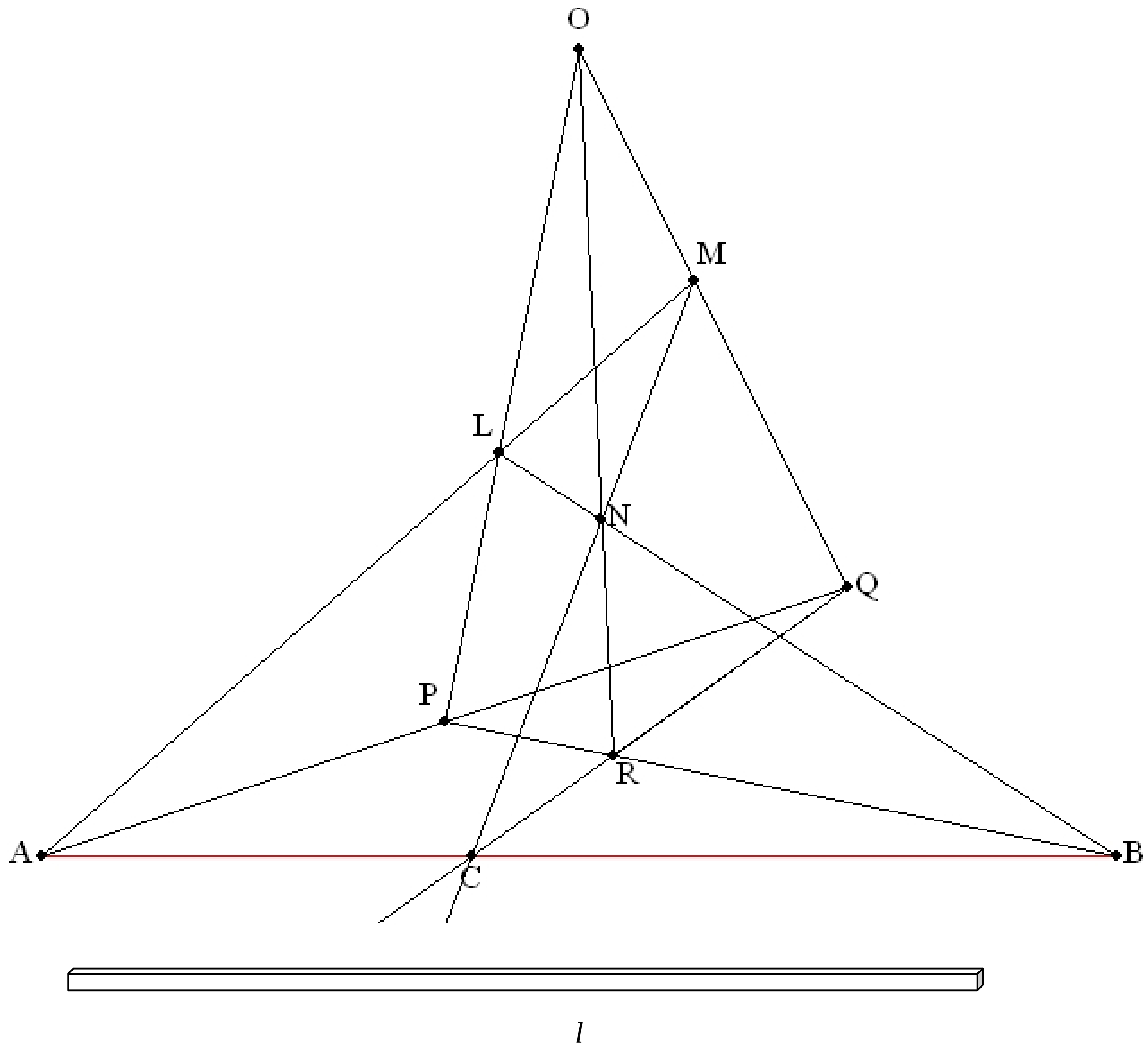
立命館慶祥中学校・高等学校　時岡郁夫

■　AB にやや足りない直線定規 $l$ だけを用いて，線分 AB を引く方法




（解）デザルグ（Desargues）の定理を利用する。




① 任意に直線 AP，BP を引く。
② AP の延長上に Q を，BP 上に R をとり，直線 QR を引く。
③ 三角錐 O－PQR の投影図となるように，OP，OQ，OR を引く。
④ OP 上に L をとる。
⑤ AL と OQ の交点を M とする。
⑥ BL と OR の交点を N とする。
⑦ QR と MN の交点を C とする。
⑧ A と C，B と C を結べばよい。

（証明）デザルグの定理により，C は AB 上の点である。よって，AC，BC を別々に結べば，これは線分 AB を引いたことになる。

立命館慶祥中学校・高等学校　時岡郁夫

**デザルグ（Desargues）の定理**
2 つの三角形の対応する頂点を結ぶ 3 直線が 1 点に会するならば，対応辺の交点は 1 直線上にある。逆も成り立つ。

（証明）

　$\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ において $AA', BB', CC'$ が 1 点に会したとする。$\Delta OBC$ を $B'C'$ で切ったとみて Menelaus の定理を適用すれば

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CC'}{C'O} \cdot \frac{OB'}{B'B} = 1$$

同様にして $\Delta OCA, \Delta OAB$ を $C'A', A'B'$ で切ると

$$\frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AA'}{A'O} \cdot \frac{OC'}{C'C} = 1$$

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BB'}{B'O} \cdot \frac{OA'}{A'A} = 1$$

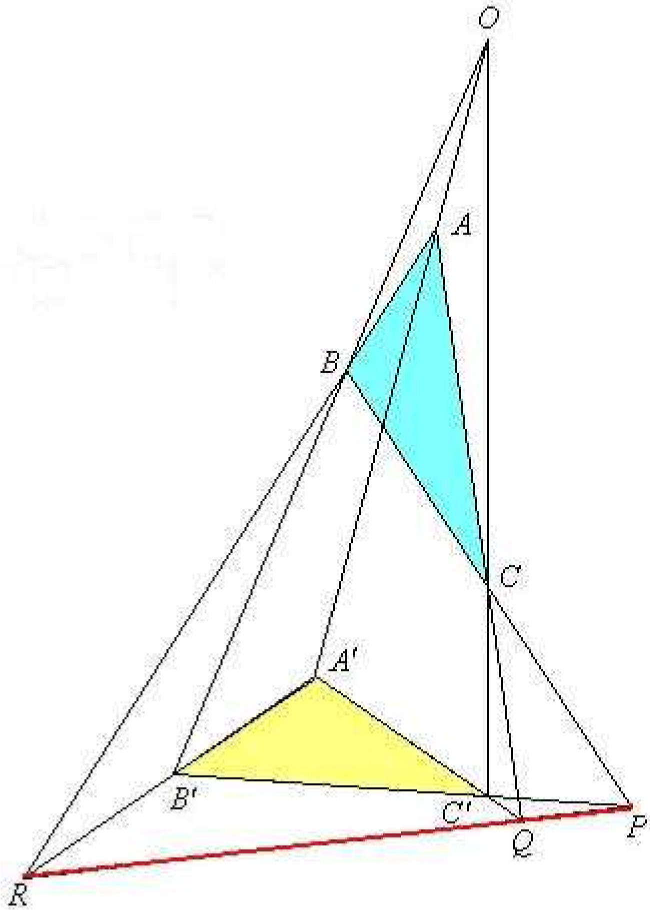
となるから，これら 3 式を掛け合わせると

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

となる。

これは $\Delta ARQ$ を $BC$ で切ったとみて Menelaus の定理の逆により $P, Q, R$ は 1 直線上にある。

　逆に，$P, Q, R$ が 1 直線上にあれば $\Delta AA'R, \Delta CC'P$ において対応する 3 頂点を結ぶ直線 $AC, A'C', RP$ が 1 点 $Q$ に会するから，対応辺の交点 $B', B, O$ は 1 直線上にあることとなり，逆が証明される。（すなわち逆は元の定理と本質的には同じものである。）




（2011/2/1）