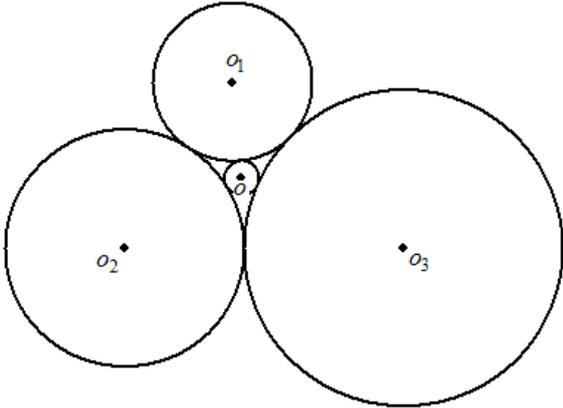
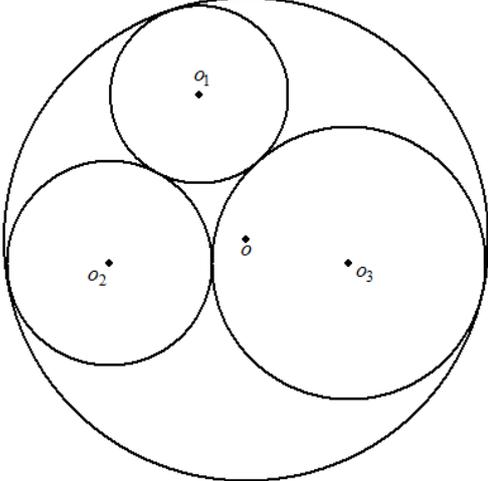


# デカルトの円定理の証明法について

## 1 はじめに

<p>[1] 3円 <math>O_i(r_i)</math> (<math>i=1,2,3</math>) が互いに外接し、これらが円 <math>O(r)</math> に外接しているとき、これらの4円の半径の間に</p> $\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r^2}\right)$ <p>という関係が成り立つ。</p> 	<p>[2] 3円 <math>O_i(r_i)</math> (<math>i=1,2,3</math>) が互いに外接し、これらが円 <math>O(r)</math> に内接しているとき、これらの4円の半径の間に</p> $\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r^2}\right)$ <p>という関係が成り立つ。</p> 
---	---

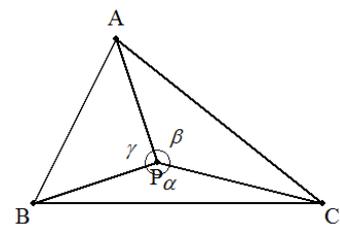
これらをデカルトの円定理という。

参考文献の[1] (PP22~23) に、三円傍斜術を使って、その証明が掲載されている。六斜術を使う証明も考えたが、どちらも高校では習わない。そこで、高校生向けに、三角関数を使った証明法を紹介したい。

## 2 補題

$\triangle ABC$  内に点  $P$  を取り、 $\angle BPC = \alpha$ ,  $\angle CPA = \beta$ ,  $\angle APB = \gamma$  とおくと、

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1 = 0$  である。



(証)  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$  であるから、 $\cos(\alpha + \beta) = \cos(2\pi - \gamma)$

加法定理より  $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos \gamma$

移項して、両辺を2乗すると  $(\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma)^2 = (\sin \alpha \sin \beta)^2$

$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ ,  $\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta$  であるから

$(\cos \alpha \cos \beta - \cos \gamma)^2 = (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)$

展開して、整理すると

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1 = 0$  ■

## 3 デカルトの円定理の証明

どの文献にも[1]の証明を書き、[2]は省略されているので、[2]の証明から行う。

(1) [2]の場合

$\angle O_2OO_3 = \alpha, \angle O_3OO_1 = \beta, \angle O_1OO_2 = \gamma$  とおくと、右図

より余弦定理から

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(r-r_2)^2 + (r-r_3)^2 - (r_2+r_3)^2}{2(r-r_2)(r-r_3)} \\ &= \frac{r^2 - (r_2+r_3)r - r_2r_3}{(r-r_2)(r-r_3)} = 1 - \frac{2r_2r_3}{(r-r_2)(r-r_3)} \end{aligned}$$

$$\cos \beta = 1 - \frac{2r_3r_1}{(r-r_3)(r-r_1)}, \quad \cos \gamma = 1 - \frac{2r_1r_2}{(r-r_1)(r-r_2)}$$

これらを、

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1 = 0 \text{ に代入}$$

すると

$$\begin{aligned} &\left\{1 - \frac{2r_2r_3}{(r-r_2)(r-r_3)}\right\}^2 + \left\{1 - \frac{2r_3r_1}{(r-r_3)(r-r_1)}\right\}^2 + \left\{1 - \frac{2r_1r_2}{(r-r_1)(r-r_2)}\right\}^2 \\ &- 2\left\{1 - \frac{2r_2r_3}{(r-r_2)(r-r_3)}\right\}\left\{1 - \frac{2r_3r_1}{(r-r_3)(r-r_1)}\right\}\left\{1 - \frac{2r_1r_2}{(r-r_1)(r-r_2)}\right\} - 1 = 0 \end{aligned}$$

両辺に  $(r-r_1)^2(r-r_2)^2(r-r_3)^2$  を掛けて、 $r$  について整理すると (途中計算省略)

$$\{r_1^2r_2^2 + r_2^2r_3^2 + r_3^2r_1^2 - 2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)\}r^2 + 2r_1r_2r_3(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)r + r_1^2r_2^2r_3^2 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$\{r_1^2r_2^2 + r_2^2r_3^2 + r_3^2r_1^2 - 2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)\} \left(\frac{r}{r_1r_2r_3}\right)^2 + 2(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1) \cdot \frac{r}{r_1r_2r_3} + 1 = 0$$

$$\frac{r}{r_1r_2r_3} = \frac{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1) \pm \sqrt{(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)^2 - \{r_1^2r_2^2 + r_2^2r_3^2 + r_3^2r_1^2 - 2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)\}}}{r_1^2r_2^2 + r_2^2r_3^2 + r_3^2r_1^2 - 2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}$$

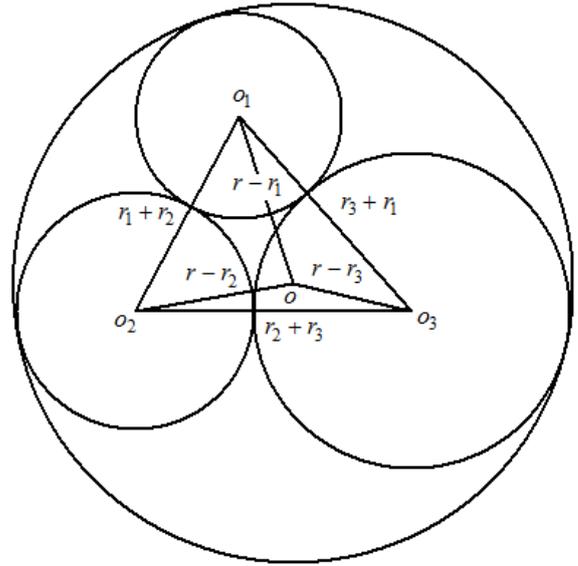
$$= \frac{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1) \pm 2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}{r_1^2r_2^2 + r_2^2r_3^2 + r_3^2r_1^2 - 2r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)} = \frac{1}{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1) \mp 2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$$

$$r > 0 \text{ より } \frac{r}{r_1r_2r_3} = \frac{1}{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1) + 2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}}$$

$$\text{よって } r = \frac{r_1r_2r_3}{-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1) + 2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}} \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{この結果は、} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r^2}\right) \cdots \textcircled{3} \text{ を満たす。}$$

(証明) ③の両辺に  $r_1^2r_2^2r_3^2r^2$  を掛けて、右辺から左辺を引くと①の左辺が得られる。■



(2) [1]の場合

$\angle O_2OO_3 = \alpha, \angle O_3OO_1 = \beta, \angle O_1OO_2 = \gamma$  とおくと、右図より余弦定理から

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(r+r_2)^2 + (r+r_3)^2 - (r_2+r_3)^2}{2(r+r_2)(r+r_3)} \\ &= \frac{r^2 + (r_2+r_3)r - r_2r_3}{(r+r_2)(r+r_3)} = 1 - \frac{2r_2r_3}{(r+r_2)(r+r_3)} \end{aligned}$$

同様に

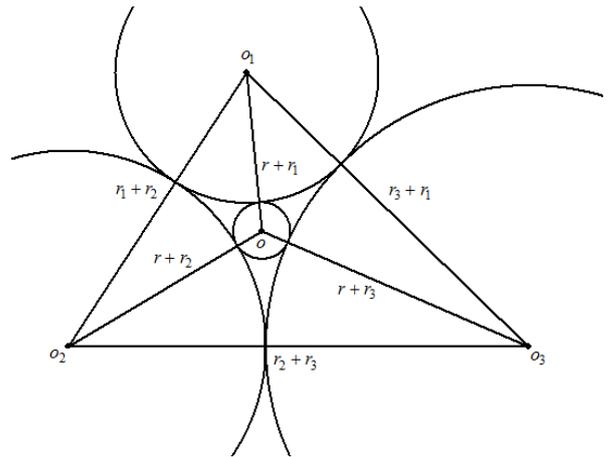
$$\cos \beta = 1 - \frac{2r_3r_1}{(r+r_3)(r+r_1)},$$

$$\cos \gamma = 1 - \frac{2r_1r_2}{(r+r_1)(r+r_2)}$$

これらを、 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1 = 0$  に代入し、整理して、 $r$  について解くと、(途中計算省略)

$$r = \frac{r_1r_2r_3}{r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 + 2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}} \cdots \textcircled{4}$$

この結果は、 $\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r^2}\right)$  を満たす。(証明省略)



#### 4 蛇足

普段、デカルトの円定理を使う機会は少ない。今回、初等数学第 78 号の課題の一つである 78-1 の問題(参考文献 [3])を考えて、さらに、右図の円の半径を計算してみようと思ったのが、レポート作成のきっかけである。

4 分の 1 円 O の半径を 1 とすると、半円 A, 半円 B, 円 C, 円 D, 円 E, 円 F, 半円 G, 円 H の半径はそれぞれ、

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \frac{1}{23}, \frac{1}{15}, \frac{1}{18} \text{ となる。}$$

#### 5 終わりに

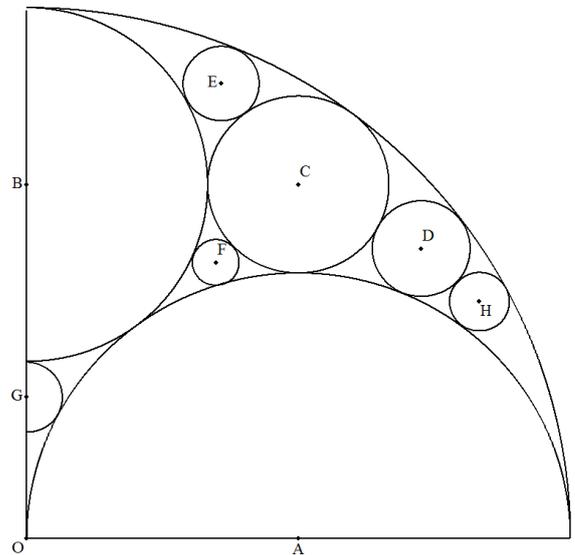
計算してみて分かったが、この証明法は計算量が多くて大変である。補題の

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1 = 0 \text{ を長さ}$$

の関係式に直したものが六斜術である。三角関数は使っているが、実は六斜術を用いた証明法である。やはり、先人がやってきた三円傍斜術を使って証明の方が計算量は少ないと思う。

初めてこの定理を見たとき、このように美しい定理を見つけたデカルトはすごいと思った。流石、後世に名を残すだけのことはある。形は違えど、②、④を見つけていた和算家もすごい。

さらに、空間においても、拡張された球定理が記載されていた。(文献[2])



[1] 半径  $r_5$  の球外に、互いに外接している 4 個の球が外接している。

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}\right)^2 = 3\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} + \frac{1}{r_5^2}\right)$$

[2] 半径  $r_5$  の球内に、互いに外接している 4 個の球が内接している。

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_5}\right)^2 = 3\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} + \frac{1}{r_5^2}\right)$$

【参考文献】

- [1] 日本の幾何 何題解けますか？ (深川英俊, ダン・ペドー共著/森北出版株式会社/2010 年)
- [2] Webpage : デカルトの円定理 (google で検索すると最初にヒットする。  
<http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/taiwa/taiwaNch03/enteiri/node2.html>)
- [3] 初等数学第 78 号 (松田康雄編, 2016 年 3 月号, 1,000 円, ISSN 1345-739X)

課題 78-1 (木下宙氏出題)

問題. 外円内に甲円 2 個, 乙円 2 個, 丙円 4 個が入っている。甲乙丙 3 円中心  $O_1, O_2, O_3$  からなる三角形は辺長が 3, 4, 5 であるピタゴラス三角形 (円長が整数である直角三角形) と相似であることを示せ。

< 現存せず文献に記載されている府中市大国魂神社算額第 2 面第 38 問よりヒントを得ました。 >

