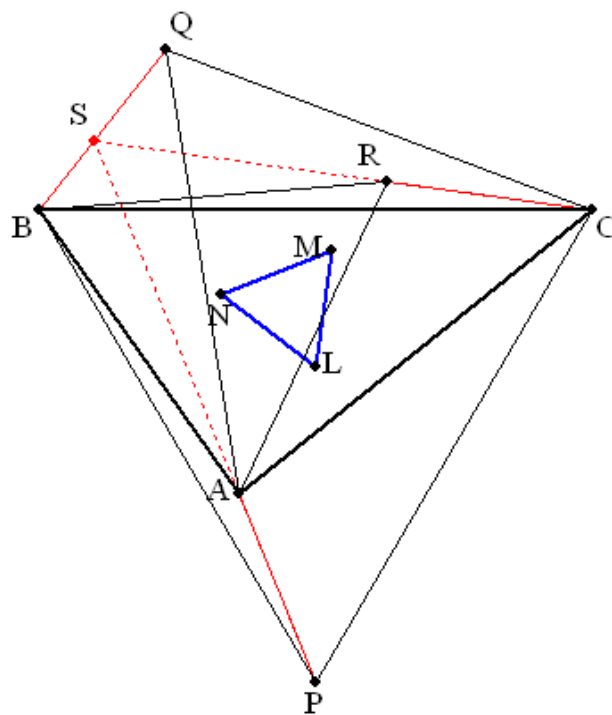
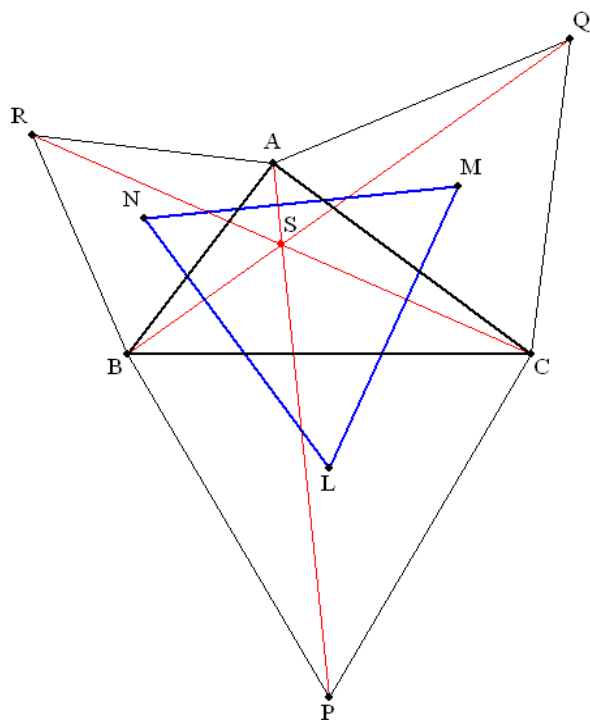


(Fermat 点)

$\triangle ABC$ の各辺上に外側または内側に正三角形を描き，頂点を P, Q, R とする。

(外側の場合)

(内側の場合)



(1) 次の①～⑦を証明せよ。

- ① 対応頂点を結ぶ 3 直線 AP, BQ, CR は 1 点 S で交わる。(この点を Fermat 点という。)
- ② 各正三角形の外接円は点 S で交わる。
- ③ AP, BQ, CR は等角をなして交わる。
- ④ $AP=BQ=CR$
- ⑤ 外側の場合, $AS+BS+CS=AP$
- ⑥ 各正三角形の重心でできる $\triangle LMN$ は正三角形となる。
- ⑦ $\triangle LMN$ の重心は $\triangle ABC$ の重心 G と一致する。

(2) AP の長さを求めよ。

(3) 外側の場合, AS の長さを求めよ。

(4) 外側の場合, $AS^2 + BS^2 + CS^2$ を求めよ。

【①, ②, ③の証明】

(外側)

正三角形 PBC と QAC との外接円の交点を S とすれば, $\angle BSP=\angle PSC=60^\circ$, $\angle ASQ=\angle QSC=60^\circ$ であるから, 3 点 A, S, P および B, S, Q は一直線上にある。

次に, $\angle BSP=60^\circ$ であるから正三角形 RBA の外接円も S を通り, 3 点 C, S, R も一直線上にある。

(内側) 外側と同様に証明できる。

正三角形 PBC と QAC との外接円の交点を S とすれば, $\angle BSP=\angle PSC=60^\circ$, $\angle ASC=\angle QSC=60^\circ$ であるから, 3 点 A, S, P および B, S, Q は一直線上にある。

次に, $\angle BSA=60^\circ$ であるから正三角形 RBA の外接円も S を通り, 3 点 C, S, R も一直線上にある。

【④の証明】

(外側)

$\angle APC \equiv \angle QBC$ (二辺夾角が等しい) より, $AP=BQ$

同様に, $\angle ABQ \equiv \angle ARC$ より, $BQ=CR$

よって, $AP=BQ=CR$

(内側) 外側の場合と同様

【⑤の証明】

(外側)

$\angle BPC + \angle CSB = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ より四角形 SBPC は円に内接する。

トレミーの定理より $BS \cdot PC + CS \cdot PB = SP \cdot BC \cdots (\ast)$

$\triangle BPC$ は正三角形であるから $PC=PB=BC$

($\ast$) 式は $BS+CS=SP$

両辺に AS を加えると $AS+BS+CS=AS+SP=AP$

【⑥の証明】

(外側) $\triangle ABC$ の重心を G, AB の中点を F, BP の中点を H とし, 補助線 CF, CH, FH を引くと,

$GL \parallel FH \parallel AP$, $GL = \frac{2}{3} FH = \frac{1}{3} AP$ である。

同様に, $GM \parallel BQ$, $GM = \frac{1}{3} BQ$, $GN \parallel CR$, $GN = \frac{1}{3} CR$

④より $AP=BQ=CR$ であるから, $GL=GM=GN$

また, ③より AP, BQ, CR は等角をなして交わるので, $\angle LGM = \angle MGN = \angle NGL = 120^\circ$

よって $\angle GLM \equiv \angle GMN \equiv \angle GNL$ となるので $LM=MN=NL \therefore$ 三角形 LMN は正三角形

(内側) 外側の場合と同様

【⑦の証明】 ⑤より三角形 LMN は正三角形となり, $GL=GM=GN$ であるから G は外心となる。正三角形の場合, 外心と重心は一致するので, $\triangle LMN$ の重心は $\triangle ABC$ の重心 G と一致する。

(2)

(外側)

$\angle BPA$ に余弦定理を適用すると

$$AP^2 = AB^2 + BP^2 - 2AB \cdot BP \cos(B + 60^\circ)$$

$$= c^2 + a^2 - 2ca(\cos B \cos 60^\circ - \sin B \sin 60^\circ)$$

$$= c^2 + a^2 - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} + 2\sqrt{3}S$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2}$$

$$AP = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S)} \cdots (\text{答})$$

(内側)

$\angle BPA$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}
AP^2 &= AB^2 + BP^2 - 2AB \cdot BP \cos(60^\circ - B) \\
&= c^2 + a^2 - 2ca(\cos 60^\circ \cos B + \sin 60^\circ \sin B) \\
&= c^2 + a^2 - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} - 2\sqrt{3}S \\
&= \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S}{2}
\end{aligned}$$

$$AP = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S)} \cdots (\text{答})$$

(3) (外側)

$AS = x, BS = y, CS = z$ とおく。

余弦定理より $y^2 + yz + z^2 = a^2 \cdots \textcircled{1}$, $z^2 + zx + x^2 = b^2 \cdots \textcircled{2}$, $x^2 + xy + y^2 = c^2 \cdots \textcircled{3}$

また, $S = \frac{1}{2}(yz + zx + xy)\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}(yz + zx + xy) \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$ より $2(x + y + z)^2 - 3(yz + zx + xy) = a^2 + b^2 + c^2$

これに $\textcircled{4}$ を代入すると $x + y + z = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S)} = k \cdots \textcircled{5}$ とおく。

また, $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より $(y - x)(x + y + z) = a^2 - b^2 \quad \therefore \quad y = x + \frac{a^2 - b^2}{k} \cdots \textcircled{6}$

$\textcircled{1} - \textcircled{3}$ より $(z - x)(x + y + z) = a^2 - c^2 \quad \therefore \quad z = x + \frac{a^2 - c^2}{k} \cdots \textcircled{7}$

$\textcircled{6}$, $\textcircled{7}$ を $\textcircled{5}$ に代入すると

$$x + \left(x + \frac{a^2 - b^2}{k}\right) + \left(x + \frac{a^2 - c^2}{k}\right) = k \quad \therefore \quad x = \frac{k^2 + b^2 + c^2 - 2a^2}{3k}$$

$$AS = x = \frac{\sqrt{3}(b^2 + c^2 - a^2) + 4S}{\sqrt{6(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S)}}$$

$$= \frac{2bc \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{3\left\{a^2 + 2bc \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right)\right\}}}$$

$$= \sqrt{\frac{-a^6 + 4a^4b^2 + 4a^4c^2 - 5a^2b^4 - 3a^2b^2c^2 - 5a^2c^4 + 2b^6 + b^4c^2 + b^2c^4 + 2c^6 - 4S\sqrt{3(a^2 - b^2)^2(a^2 - c^2)^2}}{6(a^4 - a^2b^2 - a^2c^2 + b^4 - b^2c^2 + c^4)}}$$

(4) (外側)

$$\begin{aligned}AS^2 + BS^2 + CS^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\&= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2}(yz + zx + xy) \quad \text{①+②+③より} \\&= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{2}{\sqrt{3}}S \quad \text{④より} \\&= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - 4\sqrt{3}S}{6} \\&= \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) - \sqrt{3}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{6} \\&= a^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}bc \cos\left(A + \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

(2011/4/17 時岡)

(2011/4/19 時岡)

(2011/6/19 時岡)