

フィボナッチ数列の性質

1 はじめに

フィボナッチ数列の漸化式 $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n=1,2,3,\dots)$ から一般項 a_n を求めると、

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \text{ となる。}$$

Mathematica を用いて、 $n=100$ まで計算すると次のとおり。

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, 14930352, 24157817, 39088169, 63245986, 102334155, 165580141, 267914296, 433494437, 701408733, 1134903170, 1836311903, 2971215073, 4807526976, 7778742049, 12586269025, 20365011074, 32951280099, 53316291173, 86267571272, 139583862445, 225851433717, 365435296162, 591286729879, 956722026041, 1548008755920, 2504730781961, 4052739537881, 6557470319842, 10610209857723, 17167680177565, 27777890035288, 44945570212853, 72723460248141, 117669030460994, 190392490709135, 308061521170129, 498454011879264, 806515533049393, 1304969544928657, 2111485077978050, 3416454622906707, 5527939700884757, 8944394323791464, 14472334024676221, 23416728348467685, 37889062373143906, 61305790721611591, 99194853094755497, 160500643816367088, 259695496911122585, 420196140727489673, 679891637638612258, 1100087778366101931, 1779979416004714189, 2880067194370816120, 4660046610375530309, 7540113804746346429, 12200160415121876738, 19740274219868223167, 31940434634990099905, 51680708854858323072, 83621143489848422977, 135301852344706746049, 218922995834555169026, 354224848179261915075

2 フィボナッチ数列の性質

各項を 2 以上の整数で割ったときの剰余は、ある長さの数列が繰り返して現れる。

(例) n で割ったときの剰余 ($n=2,3,4,5,7,8,11,13,19$ の場合)

項数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
数列	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765
2	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
3	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0
4	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	1	0	1	1
5	1	1	2	3	0	3	3	1	4	0	4	4	3	2	0	2	2	4	1	0
7	1	1	2	3	5	1	6	0	6	6	5	4	2	6	1	0	1	1	2	3
8	1	1	2	3	5	0	5	5	2	7	1	0	1	1	2	3	5	0	5	5
11	1	1	2	3	5	8	2	10	1	0	1	1	2	3	5	8	2	10	1	0
13	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	1	0	1	1
19	1	1	2	3	5	8	13	2	15	17	13	11	5	16	2	18	1	0	1	1

3 各項を n で割ったときの剰余がつくる繰り返す部分の数列とその長さについて ($n = 2, 3, \dots, 49$)

n	繰り返す数列	長さ
2	1,1,0,	3
3	1,1,2,0,2,2,1,0,	8
4	1,1,2,3,1,0,	6
5	1,1,2,3,0,3,3,1,4,0,4,4,3,2,0,2,2,4,1,0,	20
6	1,1,2,3,5,2,1,3,4,1,5,0,5,5,4,3,1,4,5,3,2,5,1,0,	24
7	1,1,2,3,5,1,6,0,6,6,5,4,2,6,1,0,	16
8	1,1,2,3,5,0,5,5,2,7,1,0,	12
9	1,1,2,3,5,8,4,3,7,1,8,0,8,8,7,6,4,1,5,6,2,8,1,0,	24
10	1,1,2,3,5,8,3,1,4,5,9,4,3,7,0,7,7,4,1,5,6,1,7,8,5,3,8,1,9,0,9,9,8,7,5,2,7,9,6,5,1,6,7,3,0,3,3,6,9,5,4,9,3,2,5,7,2,9,1,0,	60
11	1,1,2,3,5,8,2,10,1,0,	10
12	1,1,2,3,5,8,1,9,10,7,5,0,5,5,10,3,1,4,5,9,2,11,1,0,	24
13	1,1,2,3,5,8,0,8,3,11,1,12,0,12,12,11,10,8,5,0,5,5,10,2,12,1,0,	28
14	1,1,2,3,5,8,13,7,6,13,5,4,9,13,8,7,1,8,9,3,12,1,13,0,13,13,12,11,9,6,1,7,8,1,9,10,5,1,6,7,13,6,5,11,2,13,1,0,	48
15	1,1,2,3,5,8,13,6,4,10,14,9,8,2,10,12,7,4,11,0,11,11,7,3,10,13,8,6,14,5,4,9,13,7,5,12,2,14,1,0,	40
16	1,1,2,3,5,8,13,5,2,7,9,0,9,9,2,11,13,8,5,13,2,15,1,0,	24
17	1,1,2,3,5,8,13,4,0,4,4,8,12,3,15,1,16,0,16,16,15,14,12,9,4,13,0,13,13,9,5,14,2,16,1,0,	36
18	1,1,2,3,5,8,13,3,16,1,17,0,17,17,16,15,13,10,5,15,2,17,1,0,	24
19	1,1,2,3,5,8,13,2,15,17,13,11,5,16,2,18,1,0,	18
20	1,1,2,3,5,8,13,1,14,15,9,4,13,17,10,7,17,4,1,5,6,11,17,8,5,13,18,11,9,0,9,9,18,7,5,12,17,9,6,15,1,16,17,13,10,3,13,16,9,5,14,19,13,12,5,17,2,19,1,0,	60
21	1,1,2,3,5,8,13,0,13,13,5,18,2,20,1,0,	16
22	1,1,2,3,5,8,13,21,12,11,1,12,13,3,16,19,13,10,1,11,12,1,13,14,5,19,2,21,1,0,	30
23	1,1,2,3,5,8,13,21,11,9,20,6,3,9,12,21,10,8,18,3,21,1,22,0,22,22,21,20,18,15,10,2,12,14,3,17,20,14,11,2,13,15,5,20,2,22,1,0,	48
24	1,1,2,3,5,8,13,21,10,7,17,0,17,17,10,3,13,16,5,21,2,23,1,0,	24
25	1,1,2,3,5,8,13,21,9,5,14,19,8,2,10,12,22,9,6,15,21,11,7,18,0,18,18,11,4,15,19,9,3,12,15,2,17,19,11,5,16,21,12,8,20,3,23,1,24,0,24,24,23,22,20,17,12,4,16,20,11,6,17,23,15,13,3,16,19,10,4,14,18,7,0,7,7,14,21,10,6,16,22,13,10,23,8,6,14,20,9,4,13,17,5,22,2,24,1,0,	100
26	1,1,2,3,5,8,13,21,8,3,11,14,25,13,12,25,11,10,21,5,0,5,5,10,15,25,14,13,1,14,15,3,18,21,13,8,21,3,24,1,25,0,25,25,24,23,21,18,13,5,18,23,15,12,1,13,14,1,15,16,5,21,0,21,21,16,11,1,12,13,25,12,11,23,8,5,13,18,5,23,2,25,1,0,	84
27	1,1,2,3,5,8,13,21,7,1,8,9,17,26,16,15,4,19,23,15,11,26,10,9,19,1,20,21,14,8,22,3,25,1,26,0,26,26,25,24,22,19,14,6,20,26,19,18,10,1,11,12,23,8,4,12,16,1,17,18,8,26,7,6,13,19,5,24,2,26,1,0,	72
28	1,1,2,3,5,8,13,21,6,27,5,4,9,13,22,7,1,8,9,17,26,15,13,0,13,13,26,11,9,20,1,21,22,15,9,24,5,1,6,7,13,20,5,25,2,27,1,0,	48
29	1,1,2,3,5,8,13,21,5,26,2,28,1,0,	14
30	1,1,2,3,5,8,13,21,4,25,29,24,23,17,10,27,7,4,11,15,26,11,7,18,25,13,8,21,29,20,19,9,28,7,5,12,17,29,16,15,1,16,17,3,20,23,13,6,19,25,14,9,23,2,25,27,22,19,11,0,11,11,22,3,25,28,23,21,14,5,19,24,13,7,20,27,17,14,1,15,16,1,17,18,5,23,28,21,19,10,29,9,8,17,25,12,7,19,26,15,11,26,7,3,10,13,23,6,29,5,4,9,13,22,5,27,2,29,1,0,	120
31	1,1,2,3,5,8,13,21,3,24,27,20,16,5,21,26,16,11,27,7,3,10,13,23,5,28,2,30,1,0,	30
32	1,1,2,3,5,8,13,21,2,23,25,16,9,25,2,27,29,24,21,13,2,15,17,0,17,17,2,19,21,8,29,5,2,7,9,16,25,9,2,11,13,24,5,29,2,31,1,0,	48
33	1,1,2,3,5,8,13,21,1,22,23,12,2,14,16,30,13,10,23,0,23,23,13,3,16,19,2,21,23,11,1,12,13,25,5,30,2,32,1,0,	40

34	1,1,2,3,5,8,13,21,0,21,21,8,29,3,32,1,33,0,33,33,32,31,29,26,21,13,0,13,13,26,5,31,2,33,1,0,	36
35	1,1,2,3,5,8,13,21,34,20,19,4,23,27,15,7,22,29,16,10,26,1,27,28,20,13,33,11,9,20,29,14,8,22,30,17,12,29,6,0,6,6,12,18,30,13,8,21,29,15,9,24,33,22,20,7,27,34,26,25,16,6,22,28,15,8,23,31,19,15,34,14,13,27,5,32,2,34,1,0,	80
36	1,1,2,3,5,8,13,21,34,19,17,0,17,17,34,15,13,28,5,33,2,35,1,0,	24
37	1,1,2,3,5,8,13,21,34,18,15,33,11,7,18,25,6,31,0,31,31,25,19,7,26,33,22,18,3,21,24,8,32,3,35,1,36,0,36,36,35,34,32,29,24,16,3,19,22,4,26,30,19,12,31,6,0,6,6,12,18,30,11,4,15,19,34,16,13,29,5,34,2,36,1,0,	76
38	1,1,2,3,5,8,13,21,34,17,13,30,5,35,2,37,1,0,	18
39	1,1,2,3,5,8,13,21,34,16,11,27,38,26,25,12,37,10,8,18,26,5,31,36,28,25,14,0,14,14,28,3,31,34,26,21,8,29,37,27,25,13,38,12,11,23,34,18,13,31,5,36,2,38,1,0,	56
40	1,1,2,3,5,8,13,21,34,15,9,24,33,17,10,27,37,24,21,5,26,31,17,8,25,33,18,11,29,0,29,29,18,7,25,32,17,9,26,35,21,16,37,13,10,23,33,16,9,25,34,19,13,32,5,37,2,39,1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,15,9,24,33,17,10,27,37,24,21,5,26,31,17,8,25,33,18,11,29,0,29,29,18,7,25,32,17,9,26,35,21,16,37,13,10,23,33,16,9,25,34,19,13,32,5,37,2,39,1,0,	120
41	1,1,2,3,5,8,13,21,34,14,7,21,28,8,36,3,39,1,40,0,40,40,39,38,36,33,28,20,7,27,34,20,13,33,5,38,2,40,1,0,	40
42	1,1,2,3,5,8,13,21,34,13,5,18,23,41,22,21,1,22,23,3,26,29,13,0,13,13,26,39,23,20,1,21,22,1,23,24,5,29,34,21,13,34,5,39,2,41,1,0,	48
43	1,1,2,3,5,8,13,21,34,12,3,15,18,33,8,41,6,4,10,14,24,38,19,14,33,4,37,41,35,33,25,15,40,12,9,21,30,8,38,3,41,1,42,0,42,42,41,40,38,35,30,22,9,31,40,28,25,10,35,2,37,39,33,29,19,5,24,29,10,39,6,2,8,10,18,28,3,31,34,22,13,35,5,40,2,42,1,0,	88
44	1,1,2,3,5,8,13,21,34,11,1,12,13,25,38,19,13,32,1,33,34,23,13,36,5,41,2,43,1,0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,11,1,12,13,25,38,19,13,32,1,33,34,23,13,36,5,41,2,43,1,0,	60
45	1,1,2,3,5,8,13,21,34,10,44,9,8,17,25,42,22,19,41,15,11,26,37,18,10,28,38,21,14,35,4,39,43,37,35,27,17,44,16,15,31,1,32,33,20,8,28,36,19,10,29,39,23,17,40,12,7,19,26,0,26,26,7,33,40,28,23,6,29,35,19,9,28,37,20,12,32,44,31,30,16,1,17,18,35,8,43,6,4,10,14,24,38,17,10,27,37,19,11,30,41,26,22,3,25,28,8,36,44,35,34,24,13,37,5,42,2,44,1,0,	120
46	1,1,2,3,5,8,13,21,34,9,43,6,3,9,12,21,33,8,41,3,44,1,45,0,45,45,44,43,41,38,33,25,12,37,3,40,43,37,34,25,13,38,5,43,2,45,1,0,	48
47	1,1,2,3,5,8,13,21,34,8,42,3,45,1,46,0,46,46,45,44,42,39,34,26,13,39,5,44,2,46,1,0,	32
48	1,1,2,3,5,8,13,21,34,7,41,0,41,41,34,27,13,40,5,45,2,47,1,0,	24
49	1,1,2,3,5,8,13,21,34,6,40,46,37,34,22,7,29,36,16,3,19,22,41,14,6,20,26,46,23,20,43,14,8,22,30,3,33,36,20,7,27,34,12,46,9,6,15,21,36,8,44,3,47,1,48,0,48,48,47,46,44,41,36,28,15,43,9,3,12,15,27,42,20,13,33,46,30,27,8,35,43,29,23,3,26,29,6,35,41,27,19,46,16,13,29,42,22,15,37,3,40,43,34,28,13,41,5,46,2,48,1,0,	112

4 繰り返す数列を逆順に並べた数列について（新たな性質）

逆順に並べた数列とは、 $n=3$ のとき、 $0,1,2,2,0,2,1,1$ である。 $n=2,3,\dots,49$ についての上の表を眺めると、逆順に並べた数列について、次の性質が予想できる。

第 1 項は、 0

第 2 項は、 1

第 3 項は、 $n-1$

第 4 項は、 $2(n \geq 3)$

第 5 項は、 $n-3(n \geq 6)$

第 6 項は、 $5(n \geq 6)$

第 7 項は、 $n-8(n \geq 8)$

第 8 項は、 $13(n \geq 14)$

第 9 項は、 $2n-21(n \geq 11)$

第 10 項は、 $34(n \geq 35)$

第 11 項は、 $2n-55(n \geq 28)$

この予想は、上の表があるから気がつくもので、別の言い方をすると、コンピュータがあるから気がついたとも言える。例えば、第 10 項の $n \geq 35$ のとき 34 になるという予想は、 $n \geq 35$ の計算結果があるから見つけられるもので、コンピュータがなければ見つけることは困難である。

繰り返す数列を逆順に並べた数列の第 1 項から第 11 項までの予想をつかうと、例えば、 $n=50$ のときの繰り返す数列の初めと終わりは、次のとおりである。しかし、その繰り返す数列の長さは分からない。

$1,1,2,3,5,8,13,21,34,5,39, \dots, 45,34,79,13,42,5,47,2,49,1,0,$

5 おわりに

一般の n について、この長さを与える式があるかどうかは、いまだに分かっていないそうである。また、フィボナッチ数列をめぐるのは、この他にもさまざまな問題があり、多くの人々の興味をかき立てていて、これらの問題の中には、上で述べた問題のように、現在でも解明されていないものもある。このように、フィボナッチ数列は多くの興味深い謎をはらんでいる。

〔参考文献〕

[1] 高等学校数学科用 数学 B（数研出版）コラム「フィボナッチ数列」（P.118）