フィボナッチ数列について

$f_1=1$，$f_2=1$ とし，$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$（$n=1, 2, 3, \cdots$）で定義される数列をフィボナッチ（Fibonacci）数列という。

f_{50} までの値（Mathematica）

{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584,
4181, 6765, 10 946, 17 711, 28 657, 46 368, 75 025, 121 393, 196 418, 317 811, 514 229,
832 040, 1 346 269, 2 178 309, 3 524 578, 5 702 887, 9 227 465, 14 930 352, 24 157 817,
39 088 169, 63 245 986, 102 334 155, 165 580 141, 267 914 296, 433 494 437, 701 408 733,
1 134 903 170, 1 836 311 903, 2 971 215 073, 4 807 526 976, 7 778 742 049, 12 586 269 025}

(1) はよく知られている。今回，(2) 以降の証明を考えてみた。

(1)　一般項　$f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

(2)　$f_1+f_3+f_5+\cdots+f_{2n-1}=f_{2n}$

(3)　$f_2+f_4+f_6+\cdots+f_{2n}=f_{2n+1}-1$

(4)　$f_n<2^n$

(5)　$M=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$ のとき，$M^n=\begin{pmatrix}f_{n+1}&f_n\\f_n&f_{n-1}\end{pmatrix}$

(6)　$f_{n+1}f_{n-1}-{f_n}^2=(-1)^n$

(7)　${f_{n+1}}^2+{f_n}^2=f_{2n+1}$

(8)　$f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n=f_{n+2}-1$

(9)　${f_1}^2+{f_2}^2+{f_3}^2+\cdots+{f_n}^2=f_nf_{n+1}$

(10)　$f_1f_2+f_2f_3+f_3f_4+\cdots+f_{2n-1}f_{2n}={f_{2n}}^2$

(11)　$f_1f_2+f_2f_3+f_3f_4+\cdots+f_{2n}f_{2n+1}={f_{2n+1}}^2-1$

証明　$f_{n+2}=f_n+f_{n+1}$　…①とおく。

(1)　①を，$f_{n+2}-\alpha f_{n+1}=\beta(f_{n+1}-\alpha f_n)$　…②，$f_{n+2}-\beta=\alpha(f_{n+1}-\beta f_n)$　…③と変形すると，

$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ より，α, β は $t^2-t-1=0$ の２解である。

$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，$\beta-\alpha=\sqrt{5}$

このとき，②より，数列 $\{f_{n+1}-\alpha f_n\}$ は初項 $f_2-\alpha f_1=1-\alpha=\beta$，公比 β の等比数列であるから，

$f_{n+1}-\alpha f_n=\beta\cdot\beta^{n-1}=\beta^n$　…②′

同様に③より，$f_{n+1}-\beta f_n=\alpha^n$　…③′

②′−③′より，$(\beta-\alpha)f_n=\beta^n-\alpha^n$　$\therefore f_n=\dfrac{1}{\beta-\alpha}(\beta^n-\alpha^n)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$　■

(2)　①を用いて，f_{2n} を下げていく。

$f_{2n}=f_{2n-1}+f_{2n-2}=f_{2n-1}+f_{2n-3}+f_{2n-4}=f_{2n-1}+f_{2n-3}+f_{2n-5}+f_{2n-6}=\cdots$

$\quad=f_{2n-1}+f_{2n-3}+f_{2n-5}+\cdots+f_3+f_2=f_{2n-1}+f_{2n-3}+f_{2n-5}+\cdots+f_3+f_1$（$\because f_2=f_1$）

よって，$f_1+f_3+f_5+\cdots+f_{2n-1}=f_{2n}$　■

(3)　(2)と同様に，f_{2n+1} を下げていく。

$$f_{2n+1}=f_{2n}+f_{2n-1}=f_{2n}+f_{2n-2}+f_{2n-3}=f_{2n}+f_{2n-2}+f_{2n-4}+f_{2n-5}=\cdots$$

$$=f_{2n}+f_{2n-2}+f_{2n-4}+\cdots+f_2+f_1=f_{2n}+f_{2n-2}+f_{2n-4}+\cdots+f_2+1\quad(\because f_1=1)$$

$\therefore f_2+f_4+f_6+\cdots+f_{2n}=f_{2n+1}-1$　■

(4)　$f_n<2^n$ を数学的帰納法で証明する。

$a_n=2^n-f_n$ とおき，$a_n>0$ を示す。

[1]　$a_1=2^1-1=1>0$　$\therefore n=1$ で成り立つ。

[2]　$n\leqq k$ のとき，$a_k>0$ を仮定する。*i.e.*　$2^k>f_k$，$2^{k-1}>f_{k-1}$　$\cdots(*)$

このとき，$a_{k+1}=2^{k+1}-f_{k+1}=2^{k+1}-(f_k+f_{k-1})>2^{k+1}-(2^k+2^{k-1})$（$\because (*)$）

$$=2^{k-1}\{4-(2+1)\}=2^{k-1}>0$$

よって，$a_{k+1}>0$ が成り立つ。

以上，[1]，[2] により，$f_n<2^n$ は全ての正の整数で成り立つ。　■

(5)　$M^n=\begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1}\end{pmatrix}$　…④

[1]　$n=1$ のとき，左辺$=M=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$，右辺$=\begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ より，④は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，④が成り立つと仮定すると，$M^k=\begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1}\end{pmatrix}$　…⑤

$n=k+1$ のとき，④の左辺$=M^{k+1}=MM^k=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1}\end{pmatrix}$（∵⑤）

$$=\begin{pmatrix} f_{k+1}+f_k & f_k+f_{k-1} \\ f_{k+1} & f_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k\end{pmatrix}\ (\because 定義)$$

=④の右辺

よって $n=k+1$ のときも，④は，成り立つ。

以上 [1]，[2] により，④は全ての正の整数で成り立つ。　■

(6)　$f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\beta^n-\alpha^n)$ を左辺に代入すると，

$$f_{n+1}f_{n-1}-f_n{}^2=\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})-\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^n-\alpha^n)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{5}(\beta^{2n}-\alpha^{n+1}\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\beta^{n+1}+\alpha^{2n}-\beta^{2n}+2\alpha^n\beta^n-\alpha^{2n})=-\frac{1}{5}(\alpha\beta)^{n-1}(\beta-\alpha)^2$$

ここで，$\alpha\beta=-1$，$\beta-\alpha=\sqrt{5}$ であるから，$f_{n+1}f_{n-1}-f_n{}^2=-\dfrac{1}{5}(-1)^{n-1}\cdot(\sqrt{5})^2=(-1)^n$

よって，$f_{n+1}f_{n-1}-f_n{}^2=(-1)^n$　■

(7)　$f_{n+1}{}^2+f_n{}^2=f_{2n+1}$ について，$f_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\beta^n-\alpha^n)$ を用いて，両辺をそれぞれ計算する。

$$左辺=\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})\right\}^2+\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^n-\alpha^n)\right\}^2=\frac{1}{5}\{\beta^{2n}(\beta^2+1)+\alpha^{2n}(\alpha^2+1)-2(\alpha\beta)^n(\alpha+\beta)\}$$

$$=\frac{1}{5}\{\beta^{2n}(\beta^2+1)+\alpha^{2n}(\alpha^2+1)-2\alpha^n\beta^n(\alpha\beta+1)\}=\frac{1}{5}\{\beta^{2n}(\beta+2)+\alpha^{2n}(\alpha+2)\}$$

$$=\frac{1}{5}\left\{\beta^{2n}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+2\right)+\alpha^{2n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+2\right)\right\}=\frac{1}{5}\left\{\beta^{2n}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)+\alpha^{2n}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}=\frac{f_{2n}}{2}+\frac{\beta^{2n}+\alpha^{2n}}{2}$$

右辺$=\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{2n+1}-\alpha^{2n+1})=\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta\beta^{2n}-\alpha\alpha^{2n})=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\beta^{2n}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\alpha^{2n}\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\beta^{2n}-\alpha^{2n}+\sqrt{5}(\beta^{2n}+\alpha^{2n})}{2}\right)=\frac{f_{2n}}{2}+\frac{\beta^{2n}+\alpha^{2n}}{2}$$

よって，$f_{n+1}{}^2+f_n{}^2=f_{2n+1}$ ■

(8) (2)，(3)を辺々加えると，$f_1+f_2+f_3+\cdots+f_{2n-1}+f_{2n}=f_{2n}+f_{2n+1}-1$ …⑤

⑤の両辺から f_{2n} を引くと，$\therefore f_1+f_2+f_3+\cdots+f_{2n-1}=f_{2n+1}-1$ …⑥

⑤の右辺は，$f_{2n+2}-1$ となるから，⑤より，$f_1+f_2+f_3+\cdots+f_{2n}=f_{2n+2}-1$ …⑦

⑥，⑦より，$f_1+f_2+f_3+\cdots+f_n=f_{n+2}-1$ である。 ■

(9) $f_1{}^2+f_2{}^2+f_3{}^2+\cdots+f_n{}^2=f_nf_{n+1}$

左辺$=\sum_{k=1}^{n}f_k{}^2=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^k-\alpha^k)\right\}^2=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\{\beta^{2k}-2(\alpha\beta)^k+\alpha^{2k}\}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\{\beta^{2k}-2(-1)^k+\alpha^{2k}\}$

$$=\frac{1}{5}\left\{\frac{\beta^2(\beta^{2n}-1)}{\beta^2-1}+2\cdot\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}+\frac{\alpha^2(\alpha^{2n}-1)}{\alpha^2-1}\right\}=\frac{1}{5}\left\{\frac{\beta^2(\beta^{2n}-1)}{\beta}+1-(-1)^2+\frac{\alpha^2(\alpha^{2n}-1)}{\alpha}\right\}$$

$$=\frac{1}{5}\{\beta^{2n+1}+\alpha^{2n+1}-(\alpha+\beta)+1-(-1)^n\}=\frac{1}{5}\{\beta^{2n+1}+\alpha^{2n+1}-(-1)^n\}$$

右辺$=\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^n-\alpha^n)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})=\frac{1}{5}\{\beta^{2n+1}+\alpha^{2n+1}-(\alpha\beta)^n(\alpha+\beta)\}=\frac{1}{5}\{\beta^{2n+1}+\alpha^{2n+1}-(-1)^n\}$

よって，$f_1{}^2+f_2{}^2+f_3{}^2+\cdots+f_n{}^2=f_nf_{n+1}$ ■

(10) (6)より，$f_m{}^2=f_{m+1}f_{m-1}-(-1)^m$

$$\sum_{k=1}^{m}f_k{}^2=\sum_{k=1}^{m}\{f_{k+1}f_{k-1}-(-1)^k\}=f_2f_0+f_3f_1+f_4f_2+\cdots+f_{m+1}f_{m-1}+\frac{1-(-1)^m}{1-(-1)}$$

$$=(f_2+f_1)f_1+(f_3+f_2)f_2+(f_4+f_3)f_3+\cdots+(f_m+f_{m-1})f_{m-1}+\frac{1-(-1)^m}{2}$$

$$=f_1f_2+f_2f_3+f_3f_4+\cdots+f_{m-1}f_m+\sum_{k=1}^{m}f_k{}^2-f_m{}^2+\frac{1-(-1)^m}{2}$$

よって，$f_1f_2+f_2f_3+f_3f_4+\cdots+f_{m-1}f_m=f_m{}^2-\frac{1-(-1)^m}{2}$ …⑧

⑧で，$m=2n$ とおくと，

$f_1f_2+f_2f_3+f_3f_4+\cdots+f_{2n-1}f_{2n}=f_{2n}{}^2$ ■

(11) ⑧で，$m=2n+1$ とおくと，

$f_1f_2+f_2f_3+f_3f_4+\cdots+f_{2n}f_{2n+1}=f_{2n+1}{}^2-1$ ■

【参考文献】

[1] エレガントな問題解決－柔軟な発想を引き出すセンスと技 Paul Zeitz 著 山口文彦他 4 氏訳 オライリー・ジャパン 2011 年 8 月 16 日初版第 4 刷発行 P.61 (1)～(7)

[2] フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』 (1)～(3)，(5)，(8)，(9)

[3] 時岡郁夫 (10)，(11)

(2021/4/3 時岡)