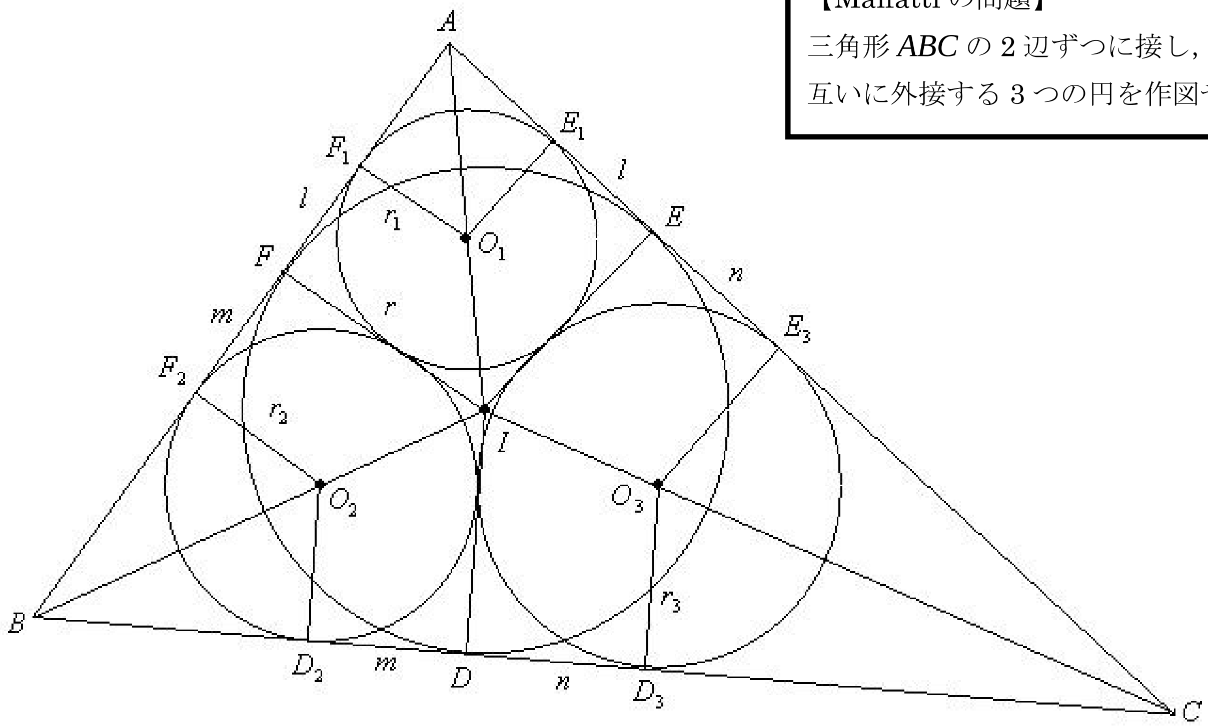
■　三角形 ABC の 2 辺ずつに接し，かつ互いに外接する 3 つの円の半径について

（解）Malfatti の問題を考えることになる。

【Malfatti の問題】
三角形 ABC の 2 辺ずつに接し，かつ互いに外接する 3 つの円を作図せよ。



3 つの円の中心を O_1,O_2,O_3，半径を r_1,r_2,r_3，三角形 ABC の内接円の中心を I，半径を r とする。
3 つの円の中心は，それぞれ AI,BI,CI 上にある。次のように補助線を引く。
I,O_2,O_3 から BC に下ろした垂線の足をそれぞれ D,D_2,D_3，
I,O_3,O_1 から CA に下ろした垂線の足をそれぞれ E,E_3,E_1，
I,O_1,O_2 から AB に下ろした垂線の足をそれぞれ F,F_1,F_2 とする。
まず，

$$D_2D_3=\sqrt{(r_2+r_3)^2-(r_3-r_2)^2}=2\sqrt{r_2r_3}=2\alpha,$$
$$E_3E_1=\sqrt{(r_3+r_1)^2-(r_1-r_3)^2}=2\sqrt{r_3r_1}=2\beta,$$
$$F_1F_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_2-r_1)^2}=2\sqrt{r_1r_2}=2\gamma$$

とおくと　$r_1=\dfrac{\beta\gamma}{\alpha},r_2=\dfrac{\gamma\alpha}{\beta},r_3=\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}$　となる。

さらに

$EE_1=FF_1=l,FF_2=DD_2=m,DD_3=EE_3=n$　とおくと，
$m+n=2\alpha,n+l=2\beta,l+m=2\gamma$　より
$l=\beta+\gamma-\alpha,m=\gamma+\alpha-\beta,n=\alpha+\beta-\gamma$　となる。

一方，

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r}{AF}=\frac{r_1}{AF_1}=\frac{r-r_1}{F_1F}=\frac{r-\dfrac{\beta\gamma}{\alpha}}{l}=\frac{\alpha r-\beta\gamma}{\alpha(\beta+\gamma-\alpha)}\cdots①$$

同様に　$\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{\beta r-\gamma\alpha}{\beta(\lambda+\alpha-\beta)}, \tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{\gamma r-\alpha\beta}{\gamma(\alpha+\beta-\gamma)}$　となる。

これらを

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1 \quad \cdots (*)$$

に代入すると

$$\frac{\alpha r-\beta\gamma}{\alpha(\beta+\gamma-\alpha)}\cdot\frac{\beta r-\gamma\alpha}{\beta(\gamma+\alpha-\beta)}+\frac{\beta r-\gamma\alpha}{\beta(\gamma+\alpha-\beta)}\cdot\frac{\gamma r-\alpha\beta}{\gamma(\alpha+\beta-\gamma)}+\frac{\gamma r-\alpha\beta}{\gamma(\alpha+\beta-\gamma)}\cdot\frac{\alpha r-\beta\gamma}{\alpha(\beta+\gamma-\alpha)}=1$$

分母を払って移項すると

$$\gamma(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha r-\beta\gamma)(\beta r-\gamma\alpha)+\alpha(\beta+\gamma-\alpha)(\beta r-\gamma\alpha)(\gamma r-\alpha\beta)+\beta(\gamma+\alpha-\beta)(\gamma r-\alpha\beta)(\alpha r-\beta\gamma)$$
$$-\alpha\beta\gamma(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)=0 \quad \cdots②$$

②の左辺を r の多項式とみて項別に計算する。

（r^2 の係数）

$$\alpha\beta\gamma(\beta+\gamma-\alpha)+\alpha\beta\gamma(\gamma+\alpha-\beta)+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta-\gamma)=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

（r の係数）

$$-\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)(\beta+\gamma-\alpha)-\beta^2(\gamma^2+\alpha^2)(\gamma+\alpha-\beta)-\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta-\gamma)=-2\alpha\beta\gamma(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

（定数項）

$$\alpha^3\beta\gamma(\beta+\gamma-\alpha)+\alpha\beta^3\gamma(\gamma+\alpha-\beta)+\alpha\beta\gamma^3(\alpha+\beta-\gamma)-\alpha\beta\gamma(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)=2(\alpha\beta\gamma)^2$$

よって②は

$$\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)r^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)r+2(\alpha\beta\gamma)^2=0$$

$\therefore\quad (\alpha+\beta+\gamma)r^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)r+2\alpha\beta\gamma=0 \cdots③$

ここで①の分子 $\alpha r-\beta\gamma$ に着目して，これに $2(r-\alpha)$ を掛けると

$$2(\alpha r-\beta\gamma)(r-\alpha)=2\alpha r^2-2(\alpha^2+\beta\gamma)r+2\alpha\beta\gamma=2(\alpha\beta+\gamma\alpha-\alpha^2)r-(\beta+\gamma-\alpha)r^2 \quad ③より$$
$$=2\alpha(\beta+\gamma-\alpha)r-(\beta+\gamma-\alpha)r^2=(\beta+\gamma-\alpha)r(2\alpha-r)$$

$\therefore\quad \alpha r-\beta\gamma=\dfrac{(\beta+\gamma-\alpha)(2\alpha-r)}{2(r-\alpha)}$

これを①に代入すると

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{r(2\alpha-r)}{2\alpha(r-\alpha)}=\frac{2x-1}{2x(1-x)}$$　（ここで $x=\dfrac{\alpha}{r}$ である。）

分母を払うと

$$2x(1-x)\tan\frac{A}{2}=2x-1$$

$$2x^2\tan\frac{A}{2}-2\left(\tan\frac{A}{2}-1\right)x-1=0$$

$x=\dfrac{\alpha}{r}>0$ であるから

$$x=\frac{\alpha}{r}=\frac{\tan\frac{A}{2}-1+\sqrt{\left(\tan\frac{A}{2}-1\right)^2+2\tan\frac{A}{2}}}{2\tan\frac{A}{2}}=\frac{\tan\frac{A}{2}-1+\frac{1}{\cos\frac{A}{2}}}{2\tan\frac{A}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\tan\frac{A}{4}\right)$$

$\therefore\quad \alpha=\frac{r}{2}\left(1+\tan\frac{A}{4}\right)$

同様にして　$\beta=\frac{r}{2}\left(1+\tan\frac{B}{4}\right),\gamma=\frac{r}{2}\left(1+\tan\frac{C}{4}\right)$

これらを　$r_1=\frac{\beta\gamma}{\alpha},r_2=\frac{\gamma\alpha}{\beta},r_3=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$　に代入すると

$$\boxed{r_1=\frac{r\left(1+\tan\frac{B}{4}\right)\left(1+\tan\frac{C}{4}\right)}{2\left(1+\tan\frac{A}{4}\right)},r_2=\frac{r\left(1+\tan\frac{C}{4}\right)\left(1+\tan\frac{A}{4}\right)}{2\left(1+\tan\frac{B}{4}\right)},r_3=\frac{r\left(1+\tan\frac{A}{4}\right)\left(1+\tan\frac{B}{4}\right)}{2\left(1+\tan\frac{C}{4}\right)}\quad\left(r=\frac{S}{s}\right)\quad\bigstar}$$

ここで，$\tan\frac{A}{4}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{A}{2}}{1+\cos\frac{A}{2}}}=\frac{1-\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{1-\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}}$ に

$$\frac{1-\cos A}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$
$$\frac{1+\cos A}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{s(s-a)}{bc}$$

（ただし，$s=\frac{a+b+c}{2}$ である。）

を代入すると

$\tan\frac{A}{4}=\frac{1-\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}}{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}=\frac{\sqrt{bc}-\sqrt{s(s-a)}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}$ となる。

また，$r=\frac{S}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ であるから

$$r_1=\frac{\left\{1+\frac{\sqrt{ca}-\sqrt{s(s-b)}}{\sqrt{(s-c)(s-a)}}\right\}\left\{1+\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{s(s-c)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)}}\right\}}{2\left\{1+\frac{\sqrt{bc}-\sqrt{s(s-a)}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}\right\}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$
$$=\frac{\left\{\sqrt{ca}+\sqrt{(s-c)(s-a)}-\sqrt{s(s-b)}\right\}\left\{\sqrt{ab}+\sqrt{(s-a)(s-b)}-\sqrt{s(s-c)}\right\}}{2\left\{\sqrt{bc}+\sqrt{(s-b)(s-c)}-\sqrt{s(s-a)}\right\}}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

よって

$$r_1=\frac{\left\{\sqrt{ca}+\sqrt{(s-c)(s-a)}-\sqrt{s(s-b)}\right\}\left\{\sqrt{ab}+\sqrt{(s-a)(s-b)}-\sqrt{s(s-c)}\right\}}{2\left\{\sqrt{bc}+\sqrt{(s-b)(s-c)}-\sqrt{s(s-a)}\right\}}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$r_2=\frac{\left\{\sqrt{ab}+\sqrt{(s-a)(s-b)}-\sqrt{s(s-c)}\right\}\left\{\sqrt{bc}+\sqrt{(s-b)(s-c)}-\sqrt{s(s-a)}\right\}}{2\left\{\sqrt{ca}+\sqrt{(s-c)(s-a)}-\sqrt{s(s-b)}\right\}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$r_3=\frac{\left\{\sqrt{bc}+\sqrt{(s-b)(s-c)}-\sqrt{s(s-a)}\right\}\left\{\sqrt{ca}+\sqrt{(s-c)(s-a)}-\sqrt{s(s-b)}\right\}}{2\left\{\sqrt{ab}+\sqrt{(s-a)(s-b)}-\sqrt{s(s-c)}\right\}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$\left(s=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$★★

(*) の証明

$A+B+C=\pi$ であるから

$$\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$$

$$\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{C}{2}}$$

分母を払って

$$\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$$

よって

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$$ （終証）

【具体例】

1　$a=15, b=14, c=13$ のとき

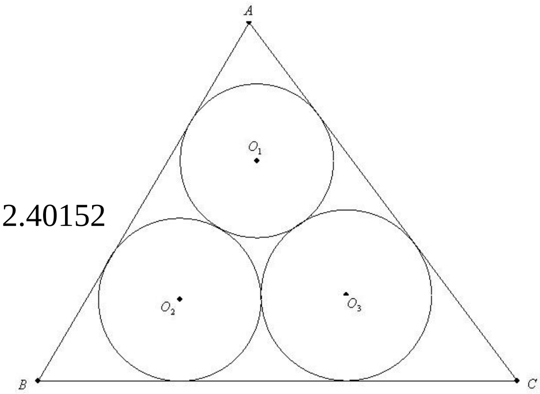
（★）を使うと

$s=\dfrac{15+14+13}{2}=21$ より $S=\sqrt{21\cdot6\cdot7\cdot8}=84$ であるから　$r=\dfrac{S}{s}=\dfrac{84}{21}=4$

余弦定理より　$\cos A=\dfrac{14^2+13^2-15^2}{2\cdot14\cdot13}=\dfrac{5}{13}, \cos B=\dfrac{33}{65}, \cos C=\dfrac{3}{5}$

また，$\tan\dfrac{A}{4}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{A}{2}}{1+\cos\frac{A}{2}}}=\dfrac{1-\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\dfrac{1-\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1-\cos A}}{\sqrt{1+\cos A}}$ であるから

$$\tan\frac{A}{4}=\frac{\sqrt{13}-3}{2},\ \tan\frac{B}{4}=\frac{\sqrt{65}-7}{4},\ \tan\frac{C}{4}=\sqrt{5}-2$$



$$r_1=\frac{4\left(1+\frac{\sqrt{65}-7}{4}\right)\left(1+\sqrt{5}-2\right)}{2\left(1+\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right)}=\frac{1}{3}\left(17-4\sqrt{5}+2\sqrt{13}-\sqrt{65}\right)=2.40152$$

$$r_2=\frac{4\left(1+\sqrt{5}-2\right)\left(1+\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right)}{2\left(1+\frac{\sqrt{65}-7}{4}\right)}=\frac{1}{7}\left(34-8\sqrt{5}-4\sqrt{13}+2\sqrt{65}\right)=2.54482$$

$$r_3=\frac{4\left(1+\frac{\sqrt{13}-3}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{65}-7}{4}\right)}{2\left(1+\sqrt{5}-2\right)}=\frac{1}{8}\left(34+8\sqrt{5}-4\sqrt{13}-2\sqrt{65}\right)=2.66773$$

（★★）を使うと

$$s=\frac{15+14+13}{2}=21,$$

$$\sqrt{bc}+\sqrt{(s-b)(s-c)}-\sqrt{s(s-a)}=\sqrt{14\cdot 13}+\sqrt{(21-14)(21-13)}-\sqrt{21(21-15)}=\sqrt{14}\left(\sqrt{13}-1\right),$$

$$\sqrt{ca}+\sqrt{(s-c)(s-a)}-\sqrt{s(s-b)}=\sqrt{13\cdot 15}+\sqrt{(21-13)(21-15)}-\sqrt{21(21-14)}=\sqrt{3}\left(\sqrt{65}-3\right),$$

$$\sqrt{ab}+\sqrt{(s-a)(s-b)}-\sqrt{s(s-c)}=\sqrt{15\cdot 14}+\sqrt{(21-15)(21-14)}-\sqrt{21(21-13)}=\sqrt{42}\left(\sqrt{5}-1\right),$$

$$\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(21-14)(21-13)}{21(21-15)}}=\frac{2}{3},\quad \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\sqrt{\frac{(21-13)(21-15)}{21(21-14)}}=\frac{4}{7},$$

$$\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\sqrt{\frac{(21-15)(21-14)}{21(21-13)}}=\frac{1}{2}$$ であるから

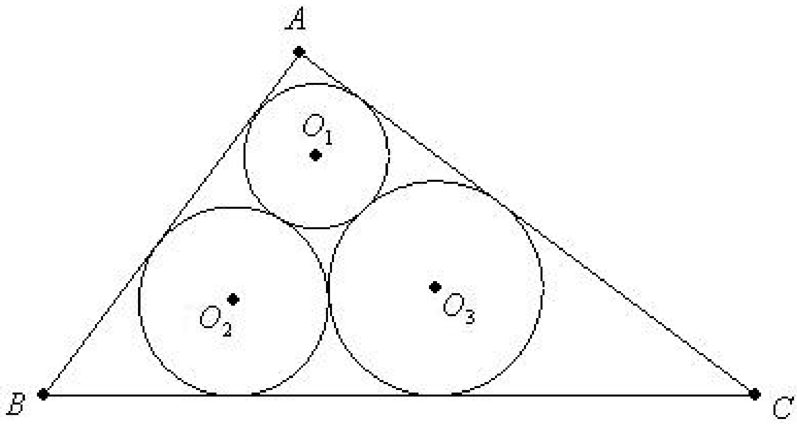
$$r_1=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{65}-3\right)\cdot\sqrt{42}\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\cdot\sqrt{14}\left(\sqrt{13}-1\right)}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\left(\sqrt{65}-3\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}{\sqrt{13}-1}=\frac{1}{3}\left(17-4\sqrt{5}+2\sqrt{13}-\sqrt{65}\right)$$

$$r_2=\frac{\sqrt{42}\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\sqrt{14}\left(\sqrt{13}-1\right)}{2\cdot\sqrt{3}\left(\sqrt{65}-3\right)}\cdot\frac{4}{7}=\frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{13}-1\right)}{\sqrt{65}-3}=\frac{1}{7}\left(34-8\sqrt{5}-4\sqrt{13}+2\sqrt{65}\right)$$

$$r_3=\frac{\sqrt{14}\left(\sqrt{13}-1\right)\cdot\sqrt{3}\left(\sqrt{65}-3\right)}{2\cdot\sqrt{42}\left(\sqrt{5}-1\right)}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\left(\sqrt{13}-1\right)\left(\sqrt{65}-3\right)}{4\left(\sqrt{5}-1\right)}=\frac{1}{8}\left(34+8\sqrt{5}-4\sqrt{13}-2\sqrt{65}\right)$$

$\boxed{2}$ $a=5, b=4, c=3$ のとき

$r=1$

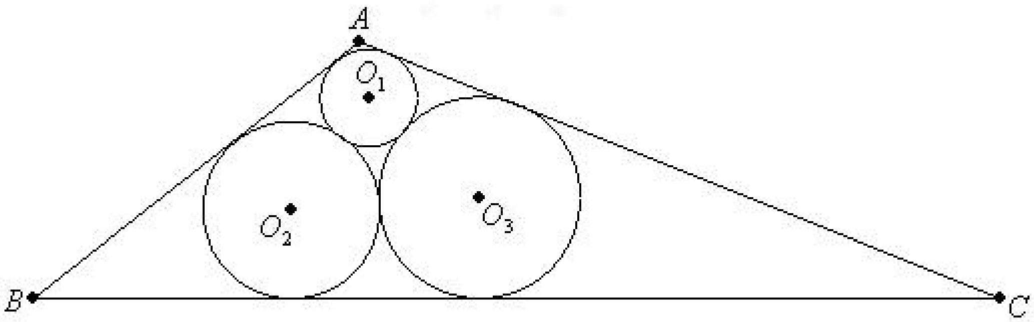


$$r_1=\frac{1}{2}\left(5+\sqrt{2}-\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)=0.507934$$

$$r_2=\frac{1}{4}\left(5-\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)=0.664894$$

$$r_3=\frac{1}{6}\left(5-\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)=0.751999$$

$\boxed{3}$ $a=7, b=5, c=3$ のとき



$$r=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

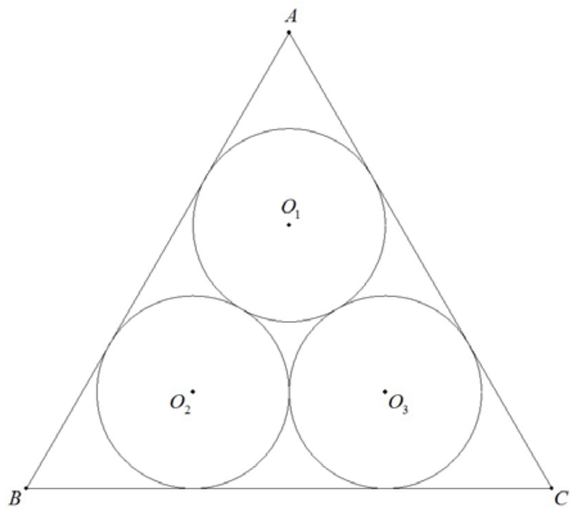
$$r_1=\frac{1}{4}\left(-3+17\sqrt{3}-6\sqrt{7}-21\sqrt{21}\right)=0.351301$$

$$r_2=\frac{1}{20}\left(-3+13\sqrt{3}-6\sqrt{7}+2\sqrt{21}\right)=0.640365$$

$$r_3=\frac{1}{108}\left(-9+39\sqrt{3}+18\sqrt{7}-6\sqrt{21}\right)=0.728500$$

$\boxed{4}$ $a=1, b=1, c=1$ のとき

$$r=\frac{\sqrt{3}}{6}$$



$$r_1=r_2=r_3=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}=0.183013$$

※この場合，$r_1=r_2=r_3=x$ とおく。

O_2, O_3 から BC へ垂線 O_2D_2, O_3D_3 を引くと

$BD_2=\sqrt{3}x, D_2D_3=2x, D_3C=\sqrt{3}x$ であるから

$\sqrt{3}x+2x+\sqrt{3}x=1$ より $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{4}$

と簡単に求めることができる。

$\boxed{5}$　$a=3, b=2, c=2$ のとき

$r=\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$，　$r_1=\dfrac{3}{28}\left(1-12\sqrt{2}+7\sqrt{7}\right)=0.273182$，　$r_2=r_3=\dfrac{1}{4}\left(-1+\sqrt{7}\right)=0.411438$

※この場合，$r_2=r_3=x$ とおき，O_2, O_3 から BC へ垂線 O_2D_2, O_3D_3 を引くと

$BD_2=\dfrac{x}{\tan\frac{B}{2}}, D_2D_3=2x, D_3C=BD_2$ であるから，$\dfrac{x}{\tan\frac{B}{2}}+2x+\dfrac{x}{\tan\frac{B}{2}}=3$　・・・①

ここで，$\cos B=\dfrac{2^2+3^2-2^2}{2\cdot 2\cdot 3}=\dfrac{3}{4}, \tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos B}{1+\cos B}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}}=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ を①に代入して

$x=\dfrac{3}{\dfrac{2}{\tan\frac{B}{2}}+2}=\dfrac{3}{2\left(\sqrt{7}+1\right)}=\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}$　と求めることができる。

また，$r_1=y$ とおき，O_1, O_2 から AB へ垂線 O_1F_1, O_2F_2 を引くと　$AF_1+F_1F_2+F_2B=AB$ であるから

$\dfrac{y}{\tan\frac{A}{2}}+2\sqrt{xy}+\dfrac{x}{\tan\frac{B}{2}}=2$ より　$y=\dfrac{3}{28}\left(1-12\sqrt{2}+7\sqrt{7}\right)$ と求められる。

$\boxed{6}$　$a=10, b=7, c=7$ のとき

$r=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$，　$r_1=\dfrac{5}{12}\left(1+6\sqrt{6}-5\sqrt{7}\right)=0.1.02841$，　$r_2=r_3=\sqrt{6}-1=1.44949$

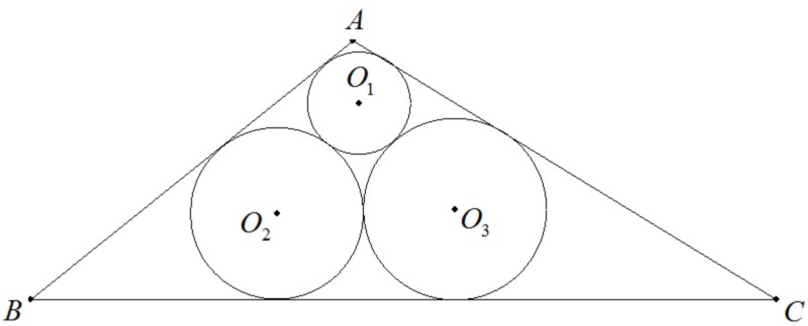
$\boxed{7}$　$a=9, b=6, c=5$ のとき

$r=\sqrt{2}$

$r_1=-4+5\sqrt{2}-\sqrt{6}=0.621578$

$r_2=\dfrac{2+5\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{4}=1.04302$

$r_3=\dfrac{-4+5\sqrt{2}+\sqrt{6}}{5}=1.10411$



$\boxed{8}$　$a=27, b=26, c=25$ のとき

$r=2\sqrt{14}$

$r_1=\dfrac{1}{6}\left(-14-21\sqrt{2}+10\sqrt{7}+12\sqrt{14}\right)=4.60982$

$r_2=\dfrac{2}{13}\left(-14-21\sqrt{2}-10\sqrt{7}+27\sqrt{14}\right)=4.74904$

$r_3=\dfrac{1}{7}\left(-14+21\sqrt{2}-10\sqrt{7}+12\sqrt{14}\right)=4.87727$

（2011/6/17　時岡）