

メネラウス (Menelaus) の定理の拡張

一直線が n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ の辺 $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ またはその延長と交わる点を $P_1, P_2, \dots, P_n$ とすれば

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2} \cdot \frac{A_2P_2}{P_2A_3} \cdots \frac{A_nP_n}{P_nA_1} = 1 \quad (n \geq 3)$$

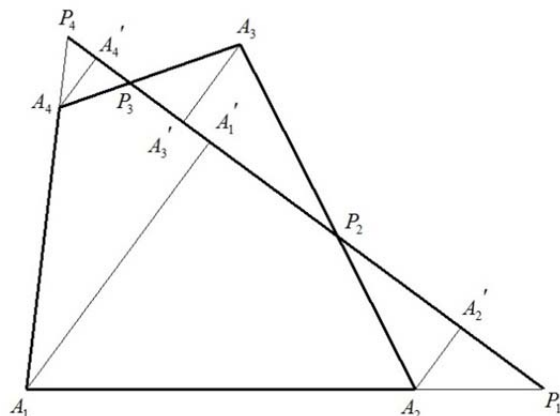
(証明) $A_1, A_2, \dots, A_n$ から一直線への垂線の足を $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ とすれば

$A_1A'_1 \parallel A_2A'_2 \parallel \cdots \parallel A_nA'_n$ より

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2} = \frac{A_1A'_1}{A_2A'_2}, \frac{A_2P_2}{P_2A_3} = \frac{A_2A'_2}{A_3A'_3}, \dots, \frac{A_nP_n}{P_nA_1} = \frac{A_nA'_n}{A_1A'_1}$$

よって

$$\frac{A_1P_1}{P_1A_2} \cdot \frac{A_2P_2}{P_2A_3} \cdots \frac{A_nP_n}{P_nA_1} = \frac{A_1A'_1}{A_2A'_2} \cdot \frac{A_2A'_2}{A_3A'_3} \cdots \frac{A_nA'_n}{A_1A'_1} = 1 \quad (\text{終証})$$

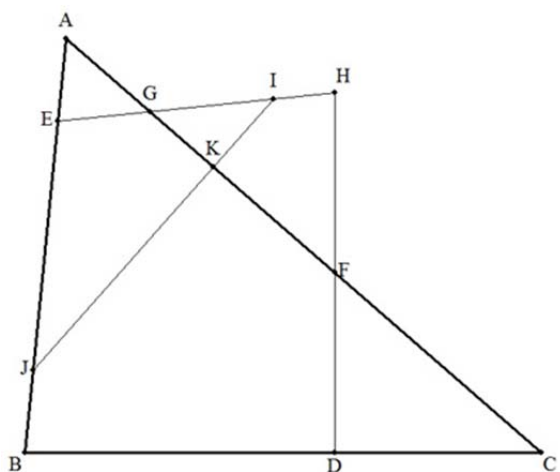


(図は $n = 4$ の場合)

【例】 $\triangle ABC$ において、 BC を $3:2$ に内分する点を D 、 AB を $1:4$ に内分する点を E 、 CA 上に 2 点 F, G をこの順にとり、 DF と EG の交点を H とすると、 $DF = FH$ であった。また、 GH を $2:1$ に内分する点を I 、 EB を $3:1$ に内分する点を J 、 IJ と FG の交点を K とするとき、次の比を求めよ。

(1) $EG : GH$

(2) $IK : KJ$



(解)

(1) 四角形 $EBDH$ と直線 AC についてメネラウスの定理の拡張より

$$\frac{EA}{AB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DF}{FH} \cdot \frac{HG}{GE} = 1$$

これに与えられた比を代入すると

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{HG}{GE} = 1 \quad \frac{HG}{GE} = \frac{2}{1} \quad \text{より } EG : GH = 1 : 2 \cdots (\text{答})$$

(2) 五角形 $BDHIJ$ と直線 AC についてメネラウスの定理の拡張より

$$\frac{BC}{CD} \cdot \frac{DF}{FH} \cdot \frac{HG}{GI} \cdot \frac{IK}{KJ} \cdot \frac{JA}{AB} = 1$$

これに与えられた比を代入すると

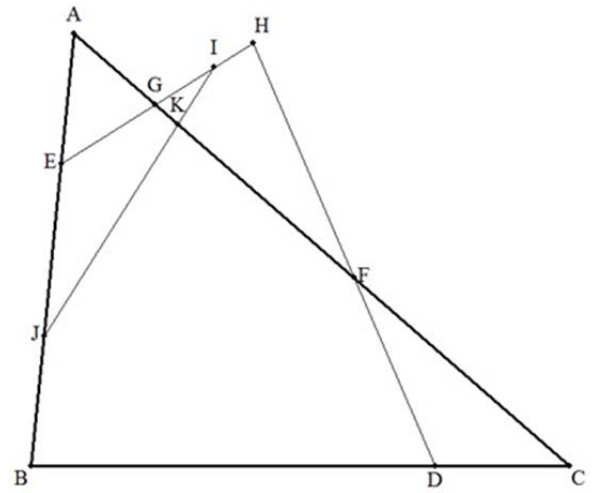
$$\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{IK}{KJ} \cdot \frac{4}{5} = 1 \quad \frac{IK}{KJ} = \frac{1}{3} \quad \text{より } IK : KJ = 1 : 3 \cdots (\text{答})$$

(練習問題)

$\triangle ABC$ において、 BC を $3:1$ に内分する点を D 、 AB を $3:7$ に内分する点を E 、 CA 上に2点 F 、 G をこの順にとり、 DF と EG の交点を H とすると、 $DF:FH=4:5$ であった。また、 GH を $3:2$ に内分する点を I 、 EB を $4:3$ に内分する点を J 、 IJ と FG の交点を K とすると、次の比を求めよ。

(1) $EG:GH$

(2) $IK:KJ$



(2011/10/16 時岡)