

タルタリアの三角形

[1]

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$

$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$$

$$25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 31 + 32 + 33 + 34 + 35$$

$$36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 = 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48$$

• • • • •

[2]

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

$$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$$

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2$$

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$$

$$78^2 + 79^2 + 80^2 + 81^2 + 82^2 + 83^2 + 84^2 = 85^2 + 86^2 + 87^2 + 88^2 + 89^2 + 90^2$$

• • • • •

【証明】 等式を上から順に、1 行目、2 行目、…、 n 行目、…とする。

[1] n 行目の左辺は、初項 n^2 、公差 1、項数 $n+1$ の等差数列の和である。

$$\text{左辺} = \frac{1}{2}(n+1)\{2n^2 + (n+1-1) \cdot 1\} = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

次に、 n 行目の右辺と左辺の初項の差は、2, 3, 4, …, $n+1$, … となるから、 n 行目の右辺の初項は、 $n^2 + n + 1$
また、公差 1、項数 n の等差数列の和である。

$$\text{右辺} = \frac{1}{2}n\{2(n^2 + n + 1) + (n-1) \cdot 1\} = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

よって、 n 行目の左辺と右辺は等しい。 【終】

[2] 左辺の初項の指数 2 を除いた数を並べてできる数列を $\{a_n\}$ とし、その階差数列を $\{b_n\}$ とする。

$\{a_n\}$: 3, 10, 21, 36, 55, …

$\{b_n\}$: 7, 11, 15, 19, …

数列 b_n は初項 7、公差 4 の等差数列となるから、 $b_n = 7 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 3$

$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k+3) = 3 + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + 3(n-1) = 2n^2 + n$$

この式は、 $a_1 = 2 \cdot 1^2 + 1 = 3$ となり、 $n=1$ でも成り立つ。

従って、 n 行目の左辺の数列は、初項 $(2n^2 + n)^2$ 、項数 $n+1$ であるからその和は、 $\sum_{k=1}^{n+1} (2n^2 + n + k - 1)^2 \dots \textcircled{1}$

右辺と左辺の初項の指数 2 を除いた数の差は、2, 3, 4, …, $n+1$, … となるから、 n 行目の右辺の初項は、 $(a_n + n + 1)^2$ である。

また、項数 n であるからその和は、 $\sum_{k=1}^n (2n^2 + 2n + k)^2 \dots \textcircled{2}$

①-②を計算すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2n^2 + n + k - 1)^2 - \sum_{k=1}^n (2n^2 + 2n + k)^2 &= \{2n^2 + 2n + (n+1) - 1\}^2 + \sum_{k=1}^n \{(2n^2 + n + k - 1)^2 - (2n^2 + 2n + k)^2\} \\ &= (2n^2 + 2n)^2 + \sum_{k=1}^n (4n^2 + 3n + 2k - 1)(-n - 1) \\ &= 4n^2(n+1)^2 - (n+1) \left\{ (4n^2 + 3n - 1) \cdot n + 2 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \right\} \\ &= 4n^2(n+1)^2 - n(n+1)(4n^2 + 4n) \\ &= 4n^2(n+1)^2 - 4n^2(n+1)^2 = 0 \end{aligned}$$

よって、 n 行目の左辺と右辺は等しい。 【終】

(2019/12/18 時岡)