

2 乗平均, 相加平均, 相乗平均, 調和平均考

§0. はじめに

中学3年生に体系数学3 (p.138) の「相加平均と相乗平均」の指導のところで, 速度の平均の求め方から調和平均についても説明した。

「行きが時速3 (km/h), 帰りが時速2 (km/h) のとき, 平均時速は何 km/h か。」

案の定, 目立ちたがりの生徒の声は $\frac{3+2}{2} = 2.5$ (km/h) であった。

正解は, 距離を a (km), 平均時速を x (km/h) とすると

$$\frac{2a}{x} = \frac{a}{3} + \frac{a}{2} \text{ より } x = \frac{2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{12}{5} = 2.4 \text{ (km/h)}$$

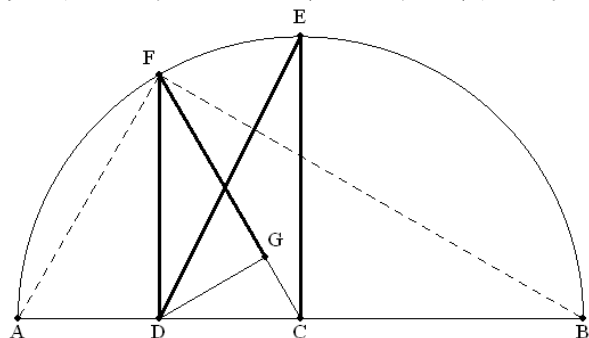
§1. 各平均の図示(1)

次の体系問題集数学3の問題(p.75の17番)を, 図を使って説明した。

$0 < a < b$ のとき, 次の4つの数を小さい順に並べよ。

$$\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}, \frac{2ab}{a+b}, \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

次の図のように $a+b$ を直径とする半円を考える。



半円の直径を AB とし, 中心を C ,

$a = AD, b = DB$ とする。 $AB \perp CE$, $AB \perp DF$ となる点 E, F を弧 AB 上にそれぞれとる。また, CF 上に点 G を $DG \perp CF$ となるようにとる。

図より明らかに $FG < FD < EC < ED$ である。ここで

$$FG = \frac{2ab}{a+b}, FD = \sqrt{ab}, EC = \frac{a+b}{2},$$

$$ED = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

である。

(証明) まず, $EC = \frac{a+b}{2}$ (相加平均) である。

$$\triangle ADF \sim \triangle FDB \text{ より } \frac{FD}{AD} = \frac{DB}{FD}$$

$$FD^2 = AD \cdot DB = ab$$

$$FD > 0 \text{ より } FD = \sqrt{ab} \text{ (相乗平均)}$$

$$\triangle FDG \sim \triangle FCD \text{ より } \frac{FG}{FD} = \frac{FD}{FC}$$

$$FG = \frac{FD^2}{FC} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} \text{ (調和平均)}$$

$$DC = AC - AD = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} \text{ であるから}$$

$$ED = \sqrt{DC^2 + EC^2} = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \text{ (2乗平均) } \blacksquare$$

一般に, $a > 0, b > 0$ のとき

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

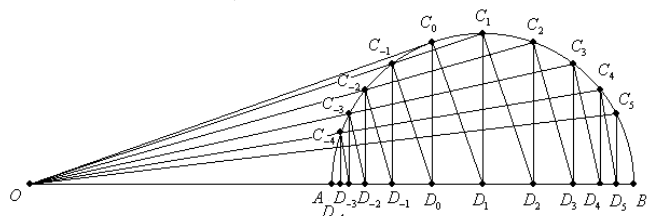
(等号は $a = b$ のとき成り立つ) である。

なお, $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ を2乗平均というのは, 「証明の

展覧会 I - 眺めて愉しむ数学」(東海大学出版会) による。

§2. 各平均の図示(2)

各平均について, 別な図示を考えてみた。



上図の線分 AB を直径とする半円について, BA の延長上に点 O をとり, O から半円への接線を OC_0 , C_0 から AB への垂線を C_0D_0 , AB 上に点 D_1 を $OC_0 \perp C_0D_1$ となるようにとり, 半円周上に点 C_1 を $AB \perp D_1C_1$ となるようにとる。このとき D_1 は半円の中心となる。次に, AB 上に点 D_2 を

$OC_1 \perp C_1D_2$ となるようにとり、半円周上に点 C_2 を $AB \perp D_2C_2$ となるようにとる。以下同様に、 $D_3, C_3, D_4, C_4, \dots$ と点をとっていく。すなわち、 $OC_n \perp C_nD_{n+1}, AB \perp D_{n+1}C_{n+1}$ である。

また、線分 OC_n と弧 AB との交点を C_{-n} 、点 C_{-n} から AB への垂線を $C_{-n}D_{-n}$ とする。

今、 $OA=a, OB=b$ ($0 < a \leq b$) とする。ただし、 $a=b$ のとき、点 A, B, C_n, D_n (n は整数) は一致するものとする。

このとき、次が成り立つ。

(1) n を整数として

$$(a) \quad OD_n = \frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}}$$

$$(b) \quad C_nD_n = \frac{(b-a)\sqrt{a^{n-1}b^{n-1}}}{a^{n-1} + b^{n-1}}$$

$$(c) \quad OC_n = \sqrt{\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^{n-1} + b^{n-1}}}$$

である。

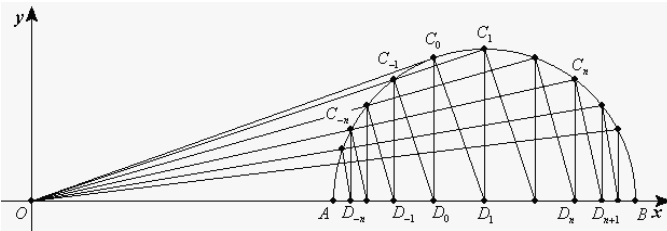
(2) n を整数、 $a > 0, b > 0$ とすると、

$$\frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}} \leq \sqrt{\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^{n-1} + b^{n-1}}} \leq \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}$$

(等号は $a=b$ のとき成り立つ)

(証明)

(1) 座標平面で考える。 AB を x 軸上に、 O を原点にとる。仮定より、 $A(a,0), B(b,0)$ である。



数学的帰納法で証明する。

[1] $n \geq 0$ のとき

(I) $n=0$ のとき、(a), (b), (c) より

$$OD_0 = \frac{2}{a^{-1} + b^{-1}} = \frac{2ab}{a+b},$$

$$C_0D_0 = \frac{(b-a)\sqrt{a^{-1}b^{-1}}}{a^{-1} + b^{-1}} = \frac{(b-a)\sqrt{ab}}{a+b},$$

$$OC_0 = \sqrt{\frac{a+b}{a^{-1} + b^{-1}}} = \sqrt{ab}$$

である。

一方、半円の中心の座標は $D_1\left(\frac{a+b}{2}, 0\right)$ であるから、

$$OD_1 = \frac{a+b}{2}$$

また、半径は $\frac{b-a}{2}$ であるから半円の方程式は、

$$\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2, y \geq 0 \text{ より}$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$= \sqrt{(x-a)(b-x)}$$

と表される。

方べきの定理より $OC_0^2 = OA \cdot OB = ab$

$OC_0 > 0$ より $\therefore OC_0 = \sqrt{ab}$

よって (c) は成り立つ。

$$\triangle OC_0D_0 \sim \triangle OD_1C_0 \text{ より } \frac{OD_0}{OC_0} = \frac{OC_0}{OD_1}$$

$$\therefore OD_0 = \frac{OC_0^2}{OD_1} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b}$$

よって (a) は成り立つ。

$\triangle OC_0D_0$ に三平方の定理を適用すると

$$C_0D_0 = \sqrt{OC_0^2 - OD_0^2} = \sqrt{ab - \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2}$$

$$= \frac{(b-a)\sqrt{ab}}{a+b}$$

よって (b) は成り立つ。

以上より、 $n=0$ のとき (a), (b), (c) は成り立つ。

(II) $n=k$ ($k \geq 0$) のとき、(a), (b), (c) が成り立つと仮定すると

$$OD_k = \frac{a^k + b^k}{a^{k-1} + b^{k-1}},$$

$$C_kD_k = \frac{(b-a)\sqrt{a^{k-1}b^{k-1}}}{a^{k-1} + b^{k-1}},$$

$$OC_k = \sqrt{\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{a^{k-1} + b^{k-1}}}$$

である。

このとき、

$$C_k \left(\frac{a^k + b^k}{a^{k-1} + b^{k-1}}, \frac{(b-a)\sqrt{a^{k-1}b^{k-1}}}{a^{k-1} + b^{k-1}} \right)$$

であるから

$$\text{線分 } OC_k \text{ の傾きは } \frac{(b-a)\sqrt{a^{k-1}b^{k-1}}}{a^k + b^k}$$

$OC_k \perp C_kD_{k+1}$ より線分 C_kD_{k+1} の方程式は

$$y - \frac{(b-a)\sqrt{a^{k-1}b^{k-1}}}{a^{k-1}+b^{k-1}} =$$

$$- \frac{a^k + b^k}{(b-a)\sqrt{a^{k-1}b^{k-1}}} \left(x - \frac{a^k + b^k}{a^{k-1} + b^{k-1}} \right)$$

$y=0$ とおくと,

$$x = \frac{(b-a)^2 a^{k-1} b^{k-1}}{(a^{k-1} + b^{k-1})(a^k + b^k)} + \frac{a^k + b^k}{a^{k-1} + b^{k-1}}$$

$$= \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{a^k + b^k}$$

$$\therefore OD_{k+1} = \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{a^k + b^k}$$

よって (a)は成り立つ。

①より

$$C_{k+1}D_{k+1} = \sqrt{\left(\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{a^k + b^k} - a\right)\left(b - \frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{a^k + b^k}\right)}$$

$$= \frac{(b-a)\sqrt{a^k b^k}}{a^k + b^k}$$

よって (b)は成り立つ。

$\Delta OC_{k+1}D_{k+1}$ に三平方の定理を適用すると

$$OC_{k+1} = \sqrt{OD_{k+1}^2 + C_{k+1}D_{k+1}^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{a^k + b^k}\right)^2 + \left(\frac{(b-a)\sqrt{a^k b^k}}{a^k + b^k}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{a^{k+2} + b^{k+2}}{a^k + b^k}}$$

よって (c)は成り立つ。

以上より, $n=k$ のとき (a), (b), (c) は成り立つと仮定すると, $n=k+1$ でも成り立つ。

従って (I), (II) より (a), (b), (c) は, $n \geq 0$ の整数で成り立つ。

[2] $n < 0$ のとき

$n = -m$ とおく ($m > 0$)。

方べきの定理より $OC_{-m} \cdot OC_m = ab$

$$OC_{-m} = \frac{ab}{OC_m} = ab \sqrt{\frac{a^{m-1} + b^{m-1}}{a^{m+1} + b^{m+1}}}$$

この結果は, (c) で m を $-m$ に置き換えたものと一致する。

また, $\Delta OC_{-m}D_{-m} \sim \Delta OC_mD_m$ より

$$\frac{OD_{-m}}{OC_{-m}} = \frac{OD_m}{OC_m} \text{ であるから}$$

$$OD_{-m} = \frac{OD_m \cdot OC_{-m}}{OC_m} = \frac{ab OD_m}{OC_m^2}$$

$$= ab \cdot \frac{a^m + b^m}{a^{m-1} + b^{m-1}} \cdot \frac{a^{m-1} + b^{m-1}}{a^{m+1} + b^{m+1}}$$

$$= \frac{ab(a^m + b^m)}{a^{m+1} + b^{m+1}}$$

この結果は, (a) で m を $-m$ に置き換えたものと一致する。

$\Delta OC_{-m}D_{-m}$ に三平方の定理を適用すると

$$C_{-m}D_{-m} = \sqrt{OC_{-m}^2 - OD_{-m}^2}$$

$$= \sqrt{\left(ab \sqrt{\frac{a^{m-1} + b^{m-1}}{a^{m+1} + b^{m+1}}}\right)^2 - \left\{\frac{ab(a^m + b^m)}{a^{m+1} + b^{m+1}}\right\}^2}$$

$$= \frac{(b-a)\sqrt{a^{m+1}b^{m+1}}}{a^{m+1} + b^{m+1}}$$

この結果は, (b) で m を $-m$ に置き換えたものと一致する。

従って $n < 0$ のとき (a), (b), (c) は成り立つ。

以上 [1], [2] より, (a), (b), (c) はすべての整数 n で成り立つ。 ■

(2) $a < b$ のとき, 直角三角形の斜辺は他の 2 辺より長いので, $OD_n \leq OC_n \leq OD_{n+1}$ (等号は $a = b$ のとき) が成り立つ。すなわち

$$\frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}} \leq \sqrt{\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^{n-1} + b^{n-1}}} \leq \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} \quad \blacksquare$$

(別証明)

各項は正であるから, 2 乗の差を計算する。

[1]

$$\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^{n-1} + b^{n-1}} - \left(\frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}}\right)^2 = \frac{a^{n-1}b^{n-1}(a-b)^2}{(a^{n-1} + b^{n-1})^2} \geq 0$$

(等号は $a = b$ のとき)

$$\frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}} > 0, \sqrt{\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^{n-1} + b^{n-1}}} > 0 \text{ であるから}$$

$$\therefore \frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}} \leq \sqrt{\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^{n-1} + b^{n-1}}}$$

[2]

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n}\right)^2 - \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^{n-1} + b^{n-1}} \\ &= \frac{a^{n-1}b^{n-1}(a^{n+1} + b^{n+1})(a-b)^2}{(a^{n-1} + b^{n-1})(a^n + b^n)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

(等号は $a = b$ のとき)

$$\sqrt{\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^{n-1} + b^{n-1}}} > 0, \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} > 0 \text{ であるから}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^{n-1}+b^{n-1}}} \leq \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$$

[1], [2] より

$$\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}} \leq \sqrt{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^{n-1}+b^{n-1}}} \leq \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$$

(等号は $a=b$ のとき) ■

§ 3. 証明された不等式

$$\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}} \leq \sqrt{\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^{n-1}+b^{n-1}}} \leq \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$$

の n に具体的な数値を代入

(1) $n=0$ のとき

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

(調和平均, 相乗平均, 相加平均)

(2) $n=1$ のとき

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

(相加平均, 2乗平均)

(3) $n=2$ のとき

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \leq \sqrt{\frac{a^3+b^3}{a+b}} = \sqrt{a^2-ab+b^2} \leq \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}$$

(4) $n=-1$ のとき

$$\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2} \leq ab \sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}} \leq \frac{2ab}{a+b}$$

各項を ab で割れば, これは(2)と同値な不等式である。

(5) $n=-2$ のとき

$$\frac{ab(a^2+b^2)}{a^3+b^3} \leq ab \sqrt{\frac{a+b}{a^3+b^3}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \leq \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$$

各項を ab で割れば, これは(3)と同値な不等式である。

以上より $a \leq b$ とすると

$$\begin{aligned} a &\leq \dots \leq \frac{ab(a^2+b^2)}{a^3+b^3} \leq ab \sqrt{\frac{a+b}{a^3+b^3}} \\ &= \frac{ab}{\sqrt{a^2-ab+b^2}} \leq \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2} \leq ab \sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}} \\ &\leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\ &\leq \frac{a^2+b^2}{a+b} \leq \sqrt{\frac{a^3+b^3}{a+b}} = \sqrt{a^2-ab+b^2} \\ &\leq \frac{a^3+b^3}{a^2+b^2} \leq \dots \leq b \end{aligned}$$

これは, 図で

$$\begin{aligned} OA &\leq \dots \leq OD_{-2} \leq OC_{-2} \leq OD_{-1} \leq OC_{-1} \\ &\leq OD_0 \leq OC_0 \leq OD_1 \leq OC_1 \leq OD_2 \\ &\leq OC_2 \leq OD_3 \leq \dots \leq OB \end{aligned}$$

を示している。

§ 4. 不等式の一般化

n は整数で, $a_i > 0 (i=1, 2, \dots, m)$ のとき

$$\begin{aligned} &\frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n}{a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_m^{n-1}} \\ &\leq \sqrt{\frac{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \dots + a_m^{n+1}}{a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_m^{n-1}}} \\ &\leq \frac{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \dots + a_m^{n+1}}{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \end{aligned}$$

等号は, $a_1 = a_2 = \dots = a_m$ のとき成り立つ。

(証明) 各項は正であるから, 2乗の差を計算する。

[1]

$$\begin{aligned} &\frac{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \dots + a_m^{n+1}}{a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_m^{n-1}} - \\ &\left(\frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n}{a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_m^{n-1}} \right)^2 \\ &= \frac{(a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \dots + a_m^{n+1})(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_m^{n-1})}{(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_m^{n-1})^2} \\ &\quad - \frac{(a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n)^2}{(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \dots + a_m^{n-1})^2} \end{aligned}$$

ここで, 分母は正で, 分子は

$$\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq m \\ i \neq j}} a_i^{n-1} a_j^{n-1} (a_i - a_j)^2 \geq 0 \text{ である。}$$

等号は, $a_1 = a_2 = \dots = a_m$ のとき成り立つ。

よって

$$\frac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}{a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_m^{n-1}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_m^{n+1}}{a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_m^{n-1}}}$$

[2]

$$\left(\frac{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_m^{n+1}}{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \right)^2$$

$$- \frac{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_m^{n+1}}{a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_m^{n-1}}$$

(分母)

$$(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_m^{n-1})(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^2 > 0$$

(分子)

$$a_1^{n-1} a_2^{n-1} \cdots a_m^{n-1} (a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_m^{n+1})$$

$$\times \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq m \\ i \neq j}} a_i^{n-1} a_j^{n-1} (a_i - a_j)^2 \geq 0$$

等号は、 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$ のとき成り立つ。

よって

$$\sqrt{\frac{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_m^{n+1}}{a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_m^{n-1}}}$$

$$\leq \frac{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_m^{n+1}}{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$$

[1], [2] より

$$\frac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}{a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_m^{n-1}}$$

$$\leq \sqrt{\frac{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_m^{n+1}}{a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_m^{n-1}}}$$

$$\leq \frac{a_1^{n+1} + a_2^{n+1} + \cdots + a_m^{n+1}}{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$$

等号は、 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$ のとき成り立つ。 ■

(問題) 次の3つの数を小さい順に並べよ。

$$\frac{11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6}{11^5 + 12^5 + 13^5 + 14^5 + 15^5},$$

$$\frac{11^7 + 12^7 + 13^7 + 14^7 + 15^7}{11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6},$$

$$\sqrt{\frac{11^7 + 12^7 + 13^7 + 14^7 + 15^7}{11^5 + 12^5 + 13^5 + 14^5 + 15^5}}$$

(解) §4 の不等式で、 $n = 6, a_i = 10 + i (i = 1, 2, \dots, 5)$ のときであるから

$$\frac{11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6}{11^5 + 12^5 + 13^5 + 14^5 + 15^5}$$

$$< \sqrt{\frac{11^7 + 12^7 + 13^7 + 14^7 + 15^7}{11^5 + 12^5 + 13^5 + 14^5 + 15^5}}$$

$$< \frac{11^7 + 12^7 + 13^7 + 14^7 + 15^7}{11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6}$$

... (答)

(補足) 実際に計算すると

$$\frac{11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6}{11^5 + 12^5 + 13^5 + 14^5 + 15^5} = \frac{438531}{31975} = 13.7148,$$

$$\frac{11^7 + 12^7 + 13^7 + 14^7 + 15^7}{11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6} = \frac{6066775}{438531} = 13.8343,$$

$$\sqrt{\frac{11^7 + 12^7 + 13^7 + 14^7 + 15^7}{11^5 + 12^5 + 13^5 + 14^5 + 15^5}} = \sqrt{\frac{242671}{1279}} = 13.7744$$

§5. おわりに

そもそも §2 の不等式は、2 乗・相加・相乗・調和の各平均の図示の考察からスタートしたものである。§4 の不等式は §2 の不等式を一般化したものであるが、私はこの不等式を見たことがない。もし、他の数学誌に記載がなければ発見である。

$$\text{§2 の } OD_n = \frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}} \quad (n \text{ は整数}) \text{ など美しい性質に思う。}$$

さらに、 $C_{-n+1} D_{-n+1} = C_{n+1} D_{n+1}$ (n は整数) なる性質もある。

このように、数学は美しい学問であることも生徒に伝えていきたい。

《参考文献》

- [1] 改訂版 6カ年教育をサポートする 体系数学 3, 数研出版, 2007
- [2] 新版 体系問題集 数学 3, 数研出版, 2007
- [3] 「証明の展覧会 I - 眺めて愉しむ数学」, 東海大学出版会, 2002

(2010/3/11 時岡)