# 分数式の和の値について

分数式の和 $P_3(n)$， $P_4(n)$， $P_5(n)$を次のように定義する。

$$P_3(n)=\frac{a^n}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^n}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$$

$$P_4(n)=\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^n}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^n}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{d^n}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

$$P_5(n)=\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)}+\frac{b^n}{(b-c)(b-d)(b-e)(b-a)}+\frac{c^n}{(c-d)(c-e)(c-a)(c-b)}+\frac{d^n}{(d-e)(d-a)(d-b)(d-c)}$$
$$+\frac{e^n}{(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)}$$

これらの計算結果を表にまとめた。

なお， $P_3(n)$の欄の$\sum^{3} a^2b^2$ とは， $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ の 3 項の和を表している。

| $n$ | $P_3(n)$ | $P_4(n)$ | $P_5(n)$ |
|---|---|---|---|
| $-3$ | $\dfrac{\sum^{3} a^2b^2+abc(a+b+c)}{a^3b^3c^3}$ | $-\dfrac{\sum^{4} a^2b^2c^2+\sum^{6} a^2b^2cd}{a^3b^3c^3d^3}$ | $\dfrac{\sum^{5} a^2b^2c^2d^2+\sum^{10} a^2b^2c^2de}{a^3b^3c^3d^3}$ |
| $-2$ | $\dfrac{\sum^{3} ab}{a^2b^2c^2}$ | $-\dfrac{\sum^{4} abc}{a^2b^2c^2d^2}$ | $\dfrac{\sum^{5} abcd}{a^2b^2c^2d^2e^2}$ |
| $-1$ | $\dfrac{1}{abc}$ | $-\dfrac{1}{abcd}$ | $\dfrac{1}{abcde}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | $a+b+c$ | 1 | 0 |
| 4 | $\sum^{3} a^2+\sum^{3} ab$ | $a+b+c+d$ | 1 |
| 5 | $\sum^{3} a^3+\sum^{6} a^2b+abc$ | $\sum^{4} a^2+\sum^{6} ab$ | $a+b+c+d+e$ |
| 6 | $\sum^{3} a^4+\sum^{6} a^3b+\sum^{3} a^2b^2+\sum^{3} a^2bc$ | $\sum^{4} a^3+\sum^{12} a^2b+\sum^{4} abc$ | $\sum^{5} a^2+\sum^{10} ab$ |
| 7 | $\sum^{3} a^5+\sum^{6} a^4b+\sum^{6} a^3b^2+\sum^{3} a^3bc$ $+\sum^{3} a^2b^2c$ | $\sum^{4} a^4+\sum^{12} a^3b+\sum^{6} a^2b^2$ $+\sum^{12} a^2bc+abcd$ | $\sum^{5} a^3+\sum^{20} a^2b+\sum^{10} abc$ |

（証明） $P_4(n)$について

$$P_4(n)=\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^n}{(b-c)(b-d)(b-a)}+\frac{c^n}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{d^n}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$ を通分すると

$$P_4(4)=\frac{a^n(b-c)(b-d)(c-d)-b^n(a-c)(a-d)(c-d)+c^n(a-b)(a-d)(b-d)-d^n(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}$$

$$=\frac{P_n(a,b,c,d)}{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}$$ とおく。

分母は，6 次式（最簡交代式）でる。

分子を$P_n(a,b,c,d)$とおき， $a,b$を入れ替えてみると，

$P(b,a,c,d)=b^n(a-c)(a-d)(c-d)-a^n(b-c)(b-d)(c-d)+c^n(b-a)(b-d)(a-d)-d^n(b-a)(b-c)(a-c)$

$=-a^n(b-c)(b-d)(c-d)+b^n(a-c)(a-d)(c-d)-c^n(a-b)(a-d)(b-d)+d^n(a-b)(a-c)(b-c)=-P(a,b,c,d)$

よって，分子も交代式である。次数は$n+3$である。

$P_n(a,b,c,d)=a^n(b-c)(b-d)(c-d)-b^n(a-c)(a-d)(c-d)+c^n(a-b)(a-d)(b-d)-d^n(a-b)(a-c)(b-c)$

$=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\times Q_n(a,b,c,d)$ （$Q_n(a,b,c,d)$は対称式）・・・①と表される。

[1]　$n=0,1,2$のとき，分母より分子の次数が低いから， $P_n(a,b,c,d)=0$　よって， $P_4(0)=P_4(1)=P_4(2)=0$

[2]　$n=3$のとき，分母と分子の次数が等しくなる。

①の$a^3$の係数を比較して， $Q_n(a,b,c,d)=1$となるから， $P_4(3)=1$

[3]　$n=4$のとき， $Q_n(a,b,c,d)$は 1 次の対称式であるから， $Q_n(a,b,c,d)=k(a+b+c+d)$とおける。

①の$a^4$の係数を比較して， $k=1$となるから， $P_4(4)=a+b+c+d$

[4]　$n=5$のとき， $Q_n(a,b,c,d)$は 2 次の対称式であるから， $Q_n(a,b,c,d)=k\sum^{4}a^2+l\sum^{6}ab$とおける。

①より係数を比較して， $k=l=1$となるから， $P_4(5)=\sum^{4}a^2+\sum^{6}ab=a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd$

このような計算方法で，表の結果が得られる。（以下省略）■

この表から，一般に

$P_n(0)=P_n(1)=\cdots=P_n(n-2)=0$

$P_n(n-1)=1$

$P_n(n)=\sum^{n}a$

$P_n(n+1)=\sum^{n}a^2+\sum^{{}_nC_2}ab$

…

と推察される。

具体的に， $P_6(6)$の場合は，

$$\frac{a^6}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)(a-f)}+\frac{b^6}{(b-c)(b-d)(b-e)(b-f)(b-a)}+\frac{c^6}{(c-d)(c-e)(c-f)(c-a)(c-b)}$$

$$+\frac{d^6}{(d-e)(d-f)(d-a)(d-b)(d-c)}+\frac{e^6}{(e-f)(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)}+\frac{f^6}{(f-a)(f-b)(f-c)(f-d)(f-e)}$$

$=a+b+c+d+e+f$

（2019/1/30　時岡）