

3 次方程式の解の表現について

有理数を係数とする整式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は有理数の範囲で因数分解ができなく ($\mathbf{Q}$ 上既約),
 $d = \sqrt{a^2b^2 - 4a^3c + 18abc - 4b^3 - 27c^2}$ が有理数であるとする。
 このとき, 方程式 $f(x)=0$ の1つの解を α とするとき, 他の解を α の最低次の有理数を係数とする整式として表せ。

解答 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad \dots \textcircled{1}$ において, $x = y - \frac{a}{3}$ とおくと, $g(y) = y^3 + py + q \quad \dots \textcircled{2}$ となる。

ここに, $p = -\frac{a^2}{3} + b$, $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$ である。

方程式 $f(x)=0$ の3つの解を $\alpha_1 = \alpha$, α_2 , α_3 , 方程式 $g(x)=0$ の3つの解を $\beta_1 = \beta$, β_2 , β_3 , $\alpha_i = \beta_i - \frac{a}{3}$ ($i=1, 2, 3$) とおく。

②を因数分解して, $(y - \beta)(y^2 + \beta y + \beta^2 + p) = 0$ より, $\beta_2, \beta_3 = \frac{-\beta \pm \sqrt{-3\beta^2 - 4p}}{2}$

ここで, $\sqrt{-3\beta^2 - 4p} = A\beta^2 + B\beta + C$ ($A, B, C \in \mathbf{Q}$) とおき, 両辺を2乗すると,

$$\begin{aligned} -3\beta^2 - 4p &= A^2\beta^4 + 2AB\beta^3 + (2AC + B^2)\beta^2 + 2BC\beta + C^2 \\ &= (-pA^2 + 2AC + B^2)\beta^2 + (-qA^2 - 2pAB + 2BC)\beta - 2qAB + C^2 \quad (\because g(\beta) = \beta^3 + p\beta + q = 0 \text{ より}) \end{aligned}$$

$$1, \beta, \beta^2 \text{ は } \mathbf{Q} \text{ 上 lin. indep. より, } \begin{cases} -pA^2 + 2AC + B^2 = -3 \dots \textcircled{3} \\ -qA^2 - 2pAB + 2BC = 0 \dots \textcircled{4} \\ -2qAB + C^2 = -4p \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

$B=0$ とおくと, ④より, $A=0$ 。このとき, ③は $0 = -3$ となり不合理。

$$\therefore B \neq 0 \quad \textcircled{4} \text{より, } C = \frac{qA^2 + 2pAB}{2B} \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{6} \text{を} \textcircled{3} \text{に代入すると, } -pA^2 + 2A \cdot \frac{qA^2 + 2pAB}{2B} + B^2 = -3$$

$$\text{分母を払って整理すると, } qA^3 + pA^2B + B^3 = -3B \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\text{同様に, } \textcircled{6} \text{を} \textcircled{5} \text{に代入すると, } -2qAB + \left(\frac{qA^2 + 2pAB}{2B} \right)^2 = -4p$$

$$\text{分母を払って整理すると, } q^2A^4 + 4pqA^3B + 4p^2A^2B^2 - 8qAB^3 = -16pB^2 \quad \dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8} \times 3 - \textcircled{7} \times 16pB \text{ を計算すると, } 3q^2A^4 - 4pqA^3B - 4p^2A^2B^2 - 24qAB^3 - 16pB^4 = 0$$

$$\text{左辺を因数分解すると, } (3qA + 2pB)(qA^3 - 2pA^2B - 8B^3) = 0$$

$$\text{ところで, } qA^3 - 2pA^2B - 8B^3 = A^3 \left\{ q + p \left(-\frac{2B}{A} \right) + \left(-\frac{2B}{A} \right)^3 \right\} = A^3 g \left(-\frac{2B}{A} \right) \text{ であるから, } \mathbf{Q} \text{ 上既約である。}$$

$$\text{よって, } 3qA + 2pB = 0 \text{ より, } B = -\frac{3q}{2p}A \quad \dots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{9} \text{を} \textcircled{6} \text{に代入して, } C = \frac{2p}{3}A \quad \dots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{9}, \textcircled{10} \text{を} \textcircled{5} \text{に代入して, } A^2 = \frac{36p^2}{-4p^3 - 27q^2}$$

ところで,

$$-4p^3 - 27q^2 = -4 \left(-\frac{a^2}{3} + b \right)^3 - 27 \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right)^2 = a^2b^2 - 4a^3c + 18abc - 4b^3 - 27c^2 = d^2, \quad d \in \mathbf{Q}$$

$$\therefore A = \pm \frac{6p}{d} \in \mathbf{Q}$$

$$\text{これを⑨, ⑩に代入して, } B = \mp \frac{9q}{d} \in \mathbf{Q}, \quad C = \pm \frac{4p^2}{d} \in \mathbf{Q} \quad (\text{複号同順})$$

$$\text{よって, } \sqrt{-3\beta^2 - 4p} = \pm \left(\frac{6p}{d}\beta^2 - \frac{9q}{d}\beta + \frac{4p^2}{d} \right) \text{であるから,}$$

$$\beta_2, \beta_3 = \frac{-\beta \pm \left(\frac{6p}{d}\beta^2 - \frac{9q}{d}\beta + \frac{4p^2}{d} \right)}{2} = \frac{1}{2} \left\{ -\beta \pm \frac{1}{d}(6p\beta^2 - 9q\beta + 4p^2) \right\}$$

$$\text{さて, } \alpha = \beta - \frac{a}{3} \text{ であるから, } \beta = \alpha + \frac{a}{3}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \beta_2 - \frac{a}{3} &= \frac{1}{2} \left\{ -\beta + \frac{1}{d}(6p\beta^2 - 9q\beta + 4p^2) \right\} - \frac{a}{3} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\left(\alpha + \frac{a}{3} \right) + \frac{1}{d} \left\{ 6p \left(\alpha + \frac{a}{3} \right)^2 - 9q \left(\alpha + \frac{a}{3} \right) + 4p^2 \right\} \right] - \frac{a}{3} \\ &= -\frac{1}{2}(\alpha + a) + \frac{1}{2d} \left\{ 6p\alpha^2 + (4ap - 9q)\alpha + \frac{2}{3}a^2p - 3ap + 4p^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\text{最後に, } p = -\frac{a^2}{3} + b, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \text{ を代入すると,}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}(\alpha + a) + \frac{1}{2d} \{ 2(-a^2 + 3b)\alpha^2 + (-2a^3 + 7ab - 9c)\alpha - a^2b - 3ac + 4b^2 \}$$

同様に,

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2}(\alpha + a) - \frac{1}{2d} \{ 2(-a^2 + 3b)\alpha^2 + (-2a^3 + 7ab - 9c)\alpha - a^2b - 3ac + 4b^2 \}$$

従って, 方程式 $f(x)=0$ の1つの解を α とするとき, 他の解を α の最低次の有理数係数の整式として表すと,

$$-\frac{1}{2}(\alpha + a) \pm \frac{1}{2d} \{ 2(-a^2 + 3b)\alpha^2 + (-2a^3 + 7ab - 9c)\alpha - a^2b - 3ac + 4b^2 \} \quad \square$$

例題 $x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$ のとき, $a=1, b=-4, c=1$ より, $d=13$ であるから, 公式に代入して,

$$-\frac{1}{2}(\alpha + 1) \pm \frac{1}{2 \cdot 13} \{ 2(-1 - 12)\alpha^2 + (-2 - 28 - 9)\alpha + 4 - 3 + 64 \} = -\alpha^2 - 2\alpha + 2, \quad \alpha^2 + \alpha - 3 \quad \square \text{終}$$

(2008/1/1 時岡)

(2020/9/5 改訂)

方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の1つの解を α とし, 他の解を $A_2\alpha^2 + B_2\alpha + C_2$, $A_3\alpha^2 + B_3\alpha + C_3$ とおく。

$$d = \sqrt{a^2b^2 - 4a^3c + 18abc - 4b^3 - 27c^2} \in \mathbf{Q}$$

a	b	c	d	A ₂	B ₂	C ₂	A ₃	B ₃	C ₃
-3	-4	-1	7	-3	10	8	3	-11	-5
-2	-1	1	7	-1	1	2	1	-2	0
-1	-2	1	7	-1	0	2	1	-1	-1
0	-7	-7	7	-3	4	14	3	-5	-14
0	-7	7	7	-3	-5	14	3	4	-14
1	-2	-1	7	-1	-1	1	1	0	-2
2	-1	-1	7	-1	-2	0	1	1	-2
3	-4	1	7	-3	-11	5	3	10	-8
-6	-9	-3	9	-7	46	36	7	-47	-30
-3	0	1	9	-1	2	2	1	-3	1
-3	0	3	9	-1	1	3	1	-2	0
0	-3	-1	9	-1	0	2	1	-1	-2
0	-3	1	9	-1	-1	2	1	0	-2
3	0	-3	9	-1	-2	0	1	1	-3
3	0	-1	9	-1	-3	-1	1	2	-2
6	-9	3	9	-7	-47	30	7	46	-36
-2	-3	5	13	-1	0	4	1	-1	-2
-1	-4	-1	13	-1	1	3	1	-2	-2
1	-4	1	13	-1	-2	2	1	1	-3
2	-3	-5	13	-1	-1	2	1	0	-4
-2	-5	-1	19	-1	2	4	1	-3	-2
-1	-6	7	19	-1	-1	5	1	0	-4
1	-6	-7	19	-1	0	4	1	-1	-5
2	-5	1	19	-1	-3	2	1	2	-4
-3	-6	-1	27	-1	3	5	1	-4	-2
0	-9	-9	27	-1	1	6	1	-2	-6
0	-9	9	27	-1	-2	6	1	1	-6
3	-6	1	27	-1	-4	2	1	3	-5
1	-10	8	30	-31/30	-29/10	89/15	31/30	19/10	-104/15
2	-5	-6	30	-19/30	-31/30	8/5	19/30	1/30	-18/5
-4	-7	-1	37	-1	4	6	1	-5	-2
4	-7	1	37	-1	-5	2	1	4	-6
-5	-8	-1	49	-1	5	7	1	-6	-2
5	-8	1	49	-1	-6	2	1	5	-7
-9	-1	1	56	-3/2	13	11/2	3/2	-14	7/2
-4	-4	8	56	-1/2	1	4	1/2	-2	0
-2	-8	8	56	-1/2	0	4	1/2	-1	-2
-1	-9	1	56	-1/2	0	7/2	1/2	-1	-5/2
1	-9	-1	56	-1/2	-1	5/2	1/2	0	-7/2

a	b	c	d	A ₂	B ₂	C ₂	A ₃	B ₃	C ₃
2	-8	-8	56	-1/2	-1	2	1/2	0	-4
4	-4	-8	56	-1/2	-2	0	1/2	1	-4
9	-1	-1	56	-3/2	-14	-7/2	3/2	13	-11/2
-5	-2	8	62	-1/2	3/2	4	1/2	-5/2	1
-2	-9	2	62	-1/2	1/2	4	1/2	-1/2	-2
-1	-10	8	62	-1/2	-1/2	4	1/2	-1/2	-3
1	-10	-8	62	-1/2	-1/2	3	1/2	-1/2	-4
2	-9	-2	62	-1/2	-1/2	2	1/2	-1/2	-4
5	-2	-8	62	-1/2	-5/2	-1	1/2	3/2	-4
-6	-9	-1	63	-1	6	8	1	-7	-2
6	-9	1	63	-1	-7	2	1	6	-8
-6	-1	5	65	-3/5	14/5	4	3/5	-19/5	2
-3	-10	-1	65	-3/5	8/5	26/5	3/5	-13/5	-11/5
3	-10	1	65	-3/5	-13/5	11/5	3/5	8/5	-26/5
6	-1	-5	65	-3/5	-19/5	-2	3/5	14/5	-4
-6	0	8	72	-1/2	2	4	1/2	-3	2
-3	-9	3	72	-1/2	1	4.5	1/2	-2	-1.5
3	-9	-3	72	-1/2	-2	1.5	1/2	1	-4.5
6	0	-8	72	-1/2	-3	-2	1/2	2	-4
-7	-10	-1	79	-1	7	9	1	-8	-2
7	-10	1	79	-1	-8	2	1	7	-9
-4	-9	4	86	-1/2	3/2	5	1/2	-2.5	-1
4	-9	-4	86	-1/2	-5/2	1	1/2	3/2	-5
-7	0	7	91	-7/13	38/13	56/13	7/13	-51/13	35/13
7	0	-7	91	7/13	-51/13	-35/13	-7/13	38/13	-56/13
-5	-9	5	104	-1/2	2	11/2	1/2	-3	-1/2
5	-9	-5	104	-1/2	-3	1/2	1/2	2	-11/2
-9	-4	4	124	-3/4	25/4	13/2	3/4	-29/4	5/2
9	-4	-4	124	-3/4	-29/4	-5/2	3/4	25/4	-13/2
-6	-9	6	126	-1/2	5/2	6	1/2	-7/2	0
6	-9	-6	126	-1/2	-7/2	0	1/2	5/2	-6
-7	-9	7	152	-1/2	3	13/2	1/2	-4	1/2
7	-9	-7	152	-1/2	-4	-1/2	1/2	3	-13/2
-8	-9	8	182	-1/2	7/2	7	1/2	-9/2	1
8	-9	-8	182	-1/2	-9/2	-1	1/2	7/2	-7
-9	-9	9	216	-1/2	4	15/2	1/2	-5	3/2
9	-9	-9	216	-1/2	-5	-3/2	1/2	4	-15/2
-10	-9	10	254	-1/2	9/2	8	1/2	-11/2	2
10	-9	-10	254	-1/2	-11/2	-2	1/2	9/2	-8