

円に外接する n 角形の面積について

n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ ($n \geq 3$) の内接円と A_iA_{i+1} との接点を B_i ($i=1,2,\cdots,n-1$), A_nA_1 との接点を B_n とする。
 $A_iB_i = a_i$ ($i=1,2,\cdots,n$) とおくと、 n 角形の面積を求めよ。

(解) 円の中心を O , 半径を r とおくと、 n 角形の面積 S は

$$S = \triangle OA_1A_2 + \triangle OA_2A_3 + \cdots + \triangle OA_nA_1$$

$$= \frac{1}{2}(a_1 + a_2)r + \frac{1}{2}(a_2 + a_3)r + \cdots + \frac{1}{2}(a_n + a_1)r = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)r = f_1r \text{ となる。}$$

ただし、 $f_1 = \sum_{i=1}^n a_i$

【法則】 半径 r は次の方程式を満たす。

- [1] $n=3,4$ のとき、 $f_1r^2 - f_3 = 0$
 [2] $n=5,6$ のとき、 $f_1r^4 - f_3r^2 + f_5 = 0$
 [3] $n=7,8$ のとき、 $f_1r^6 - f_3r^4 + f_5r^2 - f_7 = 0$ (以下、同様)

ただし、 $f_1 = \sum_{i=1}^n a_i$ (n 項の和),

$f_3 = \sum_{\substack{i,j,k \\ \text{は異なる}}} a_i a_j a_k$ (${}_nC_3$ 項の和),

$f_5 = \sum_{\substack{i,j,k,l,m \\ \text{は異なる}}} a_i a_j a_k a_l a_m$ (${}_nC_5$ 項の和),

$f_7 = \sum_{\substack{i,j,k,l,m,p,q \\ \text{は異なる}}} a_i a_j a_k a_l a_m a_p a_q$ (${}_nC_7$ 項の和) は,

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ の対称式である。

さて、 $\angle A_iOB_i = \alpha_i$ ($i=1,2,\cdots,n$) とおくと、 $\tan \alpha_i = \frac{a_i}{r}$

である。

証明の前に、正接の加法定理を列記しておく。

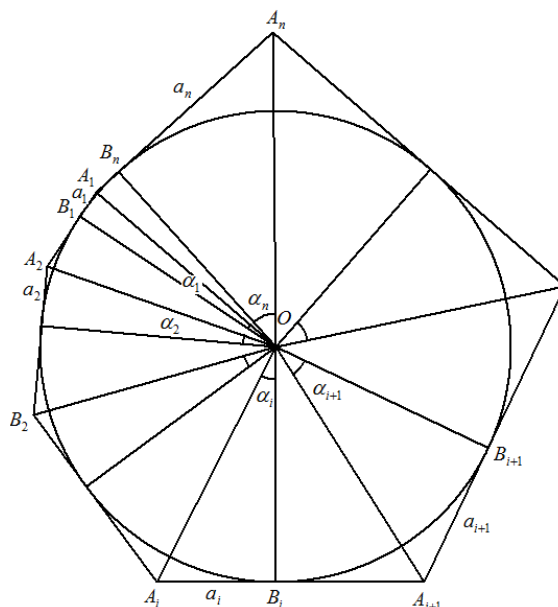
$$\tan(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2}{1 - \tan \alpha_1 \tan \alpha_2} = \frac{\frac{a_1}{r} + \frac{a_2}{r}}{1 - \frac{a_1}{r} \times \frac{a_2}{r}} = \frac{(a_1 + a_2)r}{r^2 - a_1a_2} = \frac{(\sum a_i)r}{r^2 - \Pi a_i} \text{ とおく。}$$

同様に、 $\tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \frac{\sum \tan \alpha_i - \Pi \tan \alpha_i}{1 - \sum \tan \alpha_i \tan \alpha_j} = \frac{(\sum a_i)r^2 - \Pi a_i}{r^3 - (\sum a_i a_j)r}$

$$\tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \frac{\sum \tan \alpha_i - \sum \tan \alpha_i \tan \alpha_j \tan \alpha_k}{1 - \sum \tan \alpha_i \tan \alpha_j + \Pi \tan \alpha_i} = \frac{(\sum a_i)r^3 - (\sum a_i a_j a_k)r}{r^4 - (\sum a_i a_j)r^2 + \Pi a_i}$$

【法則の証明】 $\sum \alpha_i = \pi$ であるから

$\tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k) + \tan(\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \cdots + \alpha_n) = 0$ である。



ただし, $k = \begin{cases} \frac{n+1}{2} (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{n}{2} (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$ と定める。

[1] $n = 3, 4$ のとき, $k = 2$

(1) $n = 3$ のとき, $\tan(\alpha_1 + \alpha_2) + \tan \alpha_3 = 0$

$$\frac{(\sum a_i)r}{r^2 - \Pi a_i} + \frac{a_3}{r} = 0$$

$$\therefore (\sum a_i)r^2 - \Pi a_i = 0 \cdots (1,1)$$

(2) $n = 4$ のとき, $\tan(\alpha_1 + \alpha_2) + \tan(\alpha_3 + \alpha_4) = 0$

$$\frac{(\sum a_i)r}{r^2 - \Pi a_i} + \frac{(\sum a_j)r}{r^2 - \Pi a_j} = 0$$

$$r \neq 0 \text{ より, } (\sum a_i)r^2 - \sum a_i a_j a_k = 0 \cdots (1,2)$$

$$f_1 = \sum_{i=1}^n a_i \quad (n \text{ 項の和}), \quad f_3 = \sum_{\substack{i,j,k \\ \text{は異なる}}} a_i a_j a_k \quad ({}_nC_3 \text{ 項の和}) \text{ とおくと,}$$

(1,1), (1,2)は, $f_1 r^2 - f_3 = 0$ とまとめられる。

[2] $n = 5, 6$ のとき, $k = 3$

(1) $n = 5$ のとき, $\tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \tan(\alpha_4 + \alpha_5) = 0$

$$\frac{(\sum a_i)r^2 - \Pi a_i}{r^3 - (\sum a_i a_j)r} + \frac{(\sum a_j)r}{r^2 - \Pi a_j} = 0$$

$$\therefore (\sum a_i)r^4 - (\sum a_i a_j a_k)r^2 + \Pi a_i = 0 \cdots (2,1)$$

(2) $n = 6$ のとき, $\tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \tan(\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6) = 0$

$$\frac{(\sum a_i)r^2 - \Pi a_i}{r^3 - (\sum a_i a_j)r} + \frac{(\sum a_k)r^2 - \Pi a_k}{r^3 - (\sum a_k a_l)r} = 0$$

$$\therefore (\sum a_i)r^4 - (\sum a_i a_j a_k)r^2 + \sum a_i a_j a_k a_l a_m = 0 \cdots (2,2)$$

同様に, (2,1), (2,2)は, $f_1 r^4 - f_3 r^2 + f_5 = 0$ とまとめられる。

[3] $n = 7, 8$ のとき, $k = 4$

(1) $n = 7$ のとき, $\tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \tan(\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7) = 0$

$$\frac{(\sum a_i)r^3 - (\sum a_i a_j a_k)r}{r^4 - (\sum a_i a_j)r^2 + \Pi a_i} + \frac{(\sum a_l)r^2 - \Pi a_l}{r^3 - (\sum a_l a_m)r} = 0$$

$$\therefore (\sum a_i)r^6 - (\sum a_i a_j a_k)r^4 + (\sum a_i a_j a_k a_l a_m)r^2 - \Pi a_i = 0 \cdots (3,1)$$

(2) $n = 8$ のとき, $\tan(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \tan(\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8) = 0$

$$\frac{(\sum a_i)r^3 - (\sum a_i a_j a_k)r}{r^4 - (\sum a_i a_j)r^2 + \Pi a_i} + \frac{(\sum a_l)r^3 - (\sum a_l a_m a_p)r}{r^4 - (\sum a_l a_m)r^2 + \Pi a_l} = 0$$

$$\therefore (\sum a_i)r^6 - (\sum a_i a_j a_k)r^4 + (\sum a_i a_j a_k a_l a_m)r^2 - \sum a_i a_j a_k a_l a_m a_p a_9 = 0$$

$\cdots (3,2)$

同様に, (3,1), (3,2)は, $f_1 r^6 - f_3 r^4 + f_5 r^2 - f_7 = 0$ とまとめられる。■

よって、法則から半径 r を求め、面積 S は、 $S = f_1 r$ を計算して求められる。(ただし、 $f_1 = \sum_{i=1}^n a_i$)

例 1 (円に外接する四角形の面積) $a=1, b=2, c=3, d=4$ のとき

$$f_1 = 1+2+3+4=10, f_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 50$$

r の満たす方程式は $10r^2 - 50 = 0$ 題意に適するの $r = \sqrt{5}$

よって $S = f_1 r = 10 \times \sqrt{5} = 10\sqrt{5} \cdots$ (答)

例 2 (円に外接する五角形の面積)

$a=1, b=2, c=3, d=4, e=5$ のとき

$$f_1 = 1+2+3+4+5=15,$$

$$f_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 5$$

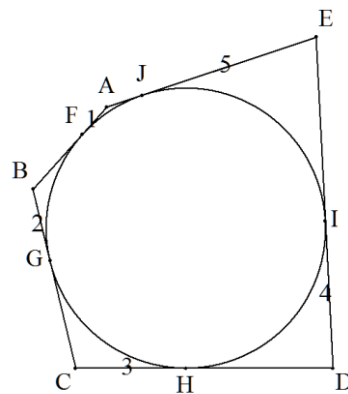
$$+ 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 = 225,$$

$f_5 = 5! = 120$ であるから、 r の満たす方程式は

$$15r^4 - 225r^2 + 120 = 0 \quad \therefore r^4 - 15r^2 + 8 = 0$$

題意に適するの $r = \sqrt{\frac{15 + \sqrt{193}}{2}} (= 3.8008184)$

よって $S = f_1 r = 15 \times \sqrt{\frac{15 + \sqrt{193}}{2}} = \frac{15\sqrt{30 + 2\sqrt{193}}}{2} (= 57.012276) \cdots$ (答)



例 3 (円に外接する七角形の面積) $a=1, b=2, c=3, d=4, e=5, f=6, g=7$ のとき

$$f_1 = 1+2+3+4+5+6+7=28,$$

$$f_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 7$$

$$+ 1 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 6 + 1 \cdot 4 \cdot 7 + 1 \cdot 5 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 6$$

$$+ 2 \cdot 3 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 6$$

$$+ 3 \cdot 4 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \cdot 6 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 3 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 4 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 6 \cdot 7 + 5 \cdot 6 \cdot 7 = 1960,$$

$$f_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7$$

$$+ 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 + 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7$$

$$+ 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7$$

$$+ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 13132$$

$f_7 = 7! = 5040$ であるから、 r の満たす方程式は

$$28r^6 - 1960r^4 + 13132r^2 - 5040 = 0 \quad \therefore r^6 - 70r^4 + 469r^2 - 180 = 0$$

残念ながら、カルダノの公式を使って解を表しても意味がないので、近似値のみ。

題意に適するの $r = 7.9087127153$

よって $S = f_1 r = 28 \times 7.9087127135 = 221.443956 \cdots$ (答)

(2016/12/19 時岡)