

■円に内接する四角形に含まれる連結した無限個の円の面積和

円に内接する四角形 ABCD について、その内接円から 4 つの頂点に向かって連結した無限個の四角形の内接円を考える。

$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ のとき、これらすべての円

の面積和 S_c は、

$$S_c = \frac{\pi \sqrt{abcd}}{4(a+c)^2 \sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}} \times \left\{ \begin{aligned} &(\sqrt{ad} + \sqrt{bc})(ad+bc+\sqrt{abcd})\sqrt{ab+cd} \\ &+ (\sqrt{ab} + \sqrt{cd})(ab+cd+\sqrt{abcd})\sqrt{ad+bc} \\ &- 4\sqrt{abcd}(ad+bc)(ab+cd) \end{aligned} \right\}$$

となる。

(証) 四角形 ABCD は円に外接するので、 $C = \pi - A$ である。

まず、三角形 DAB と三角形 BCD に余弦定理を適用すると

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\pi - A) \text{ より}$$

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)} \text{ であるから}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad+bc}, p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

また、四角形 ABCD の面積を S とおくと、 $S = \angle DAB + \angle BCD$ であるから

$$S = \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin(\pi - A) = \frac{1}{2}(ad+bc) \sin A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

ここで、四角形 ABCD は円に外接するので、 $a+c=b+d=p \cdots \textcircled{1}$ であるから

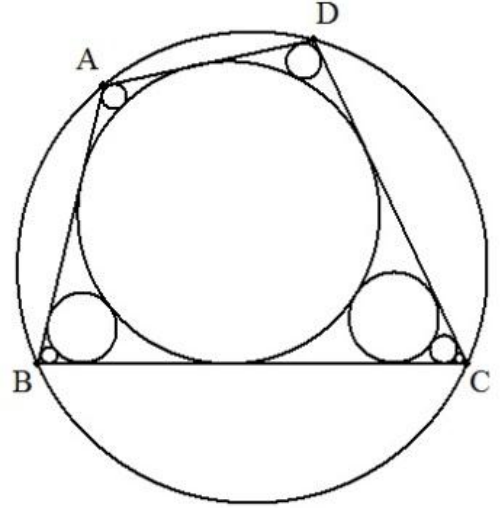
$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \sqrt{abcd}$$

また、四角形 ABCD の内接円の半径を r とすると、 $S = pr$ より、 $r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c} \left(= \frac{\sqrt{abcd}}{b+d} \right)$ となる。

次に、四角形 ABCD の内接円に外接し、2 辺 AB, AD に接する円の半径を r_a とすると、

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{r-r_a}{r+r_a} \text{ であるから, } r_a = \frac{1 - \sin \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} r$$

よって半径 r の内接円から頂点 A に向かって連結した無限個の内接円の面積和は、



初項 πr^2 ，公比 $\left(\frac{1 - \sin \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} \right)^2$ $\left(0 < \left(\frac{1 - \sin \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} \right)^2 < 1 \right)$ の無限等比級数であるから，

$$\frac{\pi r^2}{1 - \left(\frac{1 - \sin \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} \right)^2} = \pi r^2 \times \frac{\left(1 + \sin \frac{A}{2} \right)^2}{4 \sin \frac{A}{2}} = \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{A}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \right)$$

同様に，内接円から頂点 B および C，D に向かって連結した無限個の内接円の面積和は，それぞれ

$$\frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{B}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} \right), \quad \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{C}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \right), \quad \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{D}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{D}{2}} \right)$$

よって，求める四角形 ABCD の内接円から 4 つの頂点に向かって連結した無限個の内接円の面積和 S_C は

$$\begin{aligned} S_C &= \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{A}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \right) + \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{B}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} \right) + \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{C}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \right) + \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{D}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{D}{2}} \right) \\ &\quad - 3\pi r^2 \\ &= \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{A}{2} + \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \sin \frac{B}{2} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \sin \frac{C}{2} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} + \sin \frac{D}{2} + \frac{1}{\sin \frac{D}{2}} - 4 \right) \end{aligned}$$

ここで， $A + C = B + D = \pi$ であるから， $\sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2}, \sin \frac{D}{2} = \cos \frac{B}{2}$ である。

$$S_C = \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{A}{2} + \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \cos \frac{A}{2} + \frac{1}{\cos \frac{A}{2}} + \sin \frac{B}{2} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \cos \frac{B}{2} + \frac{1}{\cos \frac{B}{2}} - 4 \right) \dots \textcircled{2}$$

また， $\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}, \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$ と，①より

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{ad + bc}} = \sqrt{\frac{bc}{ad + bc}}, \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{ad + bc}} = \sqrt{\frac{ad}{ad + bc}},$$

$$\sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab + cd}} = \sqrt{\frac{cd}{ab + cd}}, \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-d)}{ab + cd}} = \sqrt{\frac{ab}{ab + cd}}, \quad r = \frac{\sqrt{abcd}}{a + c} \left(= \frac{\sqrt{abcd}}{b + d} \right)$$

これらを②に代入すると

$$S_c = \frac{\pi abcd}{4(a+c)^2} \left(\sqrt{\frac{bc}{ad+bc}} + \sqrt{\frac{ad+bc}{bc}} + \sqrt{\frac{ad}{ad+bc}} + \sqrt{\frac{ad+bc}{ad}} + \sqrt{\frac{cd}{ab+cd}} + \sqrt{\frac{ab+cd}{cd}} + \sqrt{\frac{ab}{ab+cd}} + \sqrt{\frac{ab+cd}{ab}} - 4 \right)$$

$$= \frac{\pi \sqrt{abcd}}{4(a+c)^2 \sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}}$$

$$\times \left\{ (\sqrt{ad} + \sqrt{bc})(ad+bc + \sqrt{abcd})\sqrt{ab+cd} + (\sqrt{ab} + \sqrt{cd})(ab+cd + \sqrt{abcd})\sqrt{ad+bc} - 4\sqrt{abcd}(ad+bc)(ab+cd) \right\}$$

(終証)

【例】

a	b	c	d	S_c と近似値
2	4	3	1	$\frac{1056\sqrt{7} + 399\sqrt{22} + 392\sqrt{33} + 286\sqrt{42} - 3696}{3850} \pi = 4.140386047$
3	5	4	2	$\frac{7360\sqrt{39} + 6045\sqrt{46} + 3174\sqrt{130} + 1976\sqrt{345} - 71760}{2932} \pi = 9.444945934$
4	6	5	3	$\frac{1170\sqrt{14} + 735\sqrt{26} + 624\sqrt{35} + 504\sqrt{65} - 7280}{1638} \pi = 16.49533725$
5	7	6	4	$\frac{101598\sqrt{310} + 90055\sqrt{354} + 61360\sqrt{651} + 34968\sqrt{2065} - 3072720}{442618} \pi = 25.30404916$

(2012/1/30 時岡)