

■円に内接する四角形の対角線について

1 円に内接する四角形の対角線について

円に内接する四角形 $ABCD$ の対角線の交点を E とし、
 $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ とする。

(1) $AE : BE : CE : DE = da : ab : bc : cd$

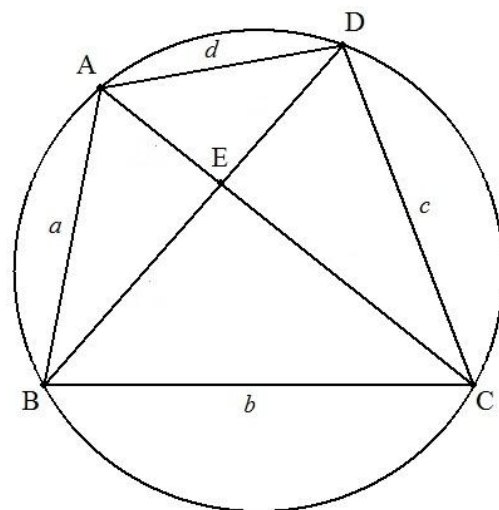
(2) 対角線 AC , BD の長さ

$$AC = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}, \quad BD = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}$$

(3) AE , BE , CE , DE の長さ

$$AE = ad \sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}, \quad BE = ab \sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}},$$

$$CE = bc \sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}, \quad DE = cd \sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}$$



(証明)

(1) いま、 $AE=\alpha$, $BE=\beta$, $CE=\gamma$, $DE=\delta$ とおく。

$\angle EDA \sim \angle ECB$ より $\alpha : \beta = d : b$

$\angle EAB \sim \angle EDC$ より $\beta : \gamma = a : c$

この2式より、連比をつくと $\alpha : \beta : \gamma = ad : ab : bc$

また、 $\angle EBC \sim \angle EAD$ より $\gamma : \delta = b : d$ であるから

さらに連比をつくと、

$\alpha : \beta : \gamma : \delta = da : ab : bc : cd$

$\therefore AE : BE : CE : DE = da : ab : bc : cd$

(2) 四角形 $ABCD$ は円に内接するので、

$\angle DAB = \theta$ とおくと、 $\angle BCD = 180^\circ - \theta$ である。

$\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle BCD$ においても同様に

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(180^\circ - \theta) = b^2 + c^2 + 2bc \cos \theta \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より、

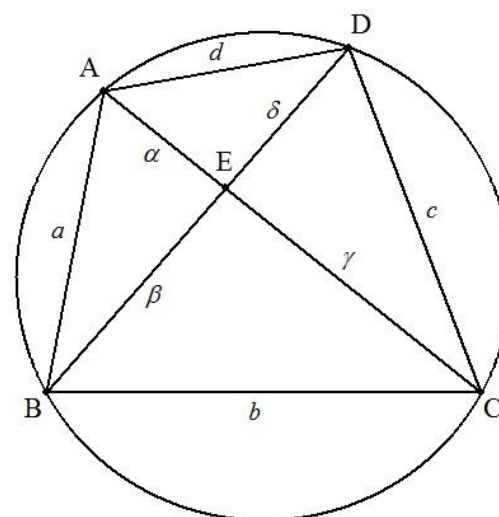
$$b^2 + c^2 + 2bc \cos \theta = a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \cdots \textcircled{3}$$

これを①に代入すると

$$\begin{aligned} BD^2 &= a^2 + d^2 - 2ad \cdot \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a^2 + d^2)(ad + bc) - ad(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)}{ad + bc} \\ &= \frac{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)}{ad + bc} = \frac{bca^2 + (b^2 + c^2)da + bcd^2}{ad + bc} = \frac{(ba + cd)(ca + bd)}{ad + bc} \end{aligned}$$

$$BD > 0 \text{ より } BD = \sqrt{\frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}} \cdots \textcircled{4}$$



同様に, $AC = \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}$

$$(3) AE = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} AC = \frac{ad}{ad+bc} \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}} = ad \sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}},$$

$$CE = \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} AC = \frac{bc}{ad+bc} \sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}} = bc \sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}$$

同様に $BE = ab \sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}, DE = cd \sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}$

【例】

	a	b	c	d	AC	BD	AE	BE	CE	DE
①	2	4	3	1	$2\sqrt{\frac{35}{11}}$	$\sqrt{\frac{55}{7}}$	$2\sqrt{\frac{5}{77}}$	$8\sqrt{\frac{5}{77}}$	$12\sqrt{\frac{5}{77}}$	$3\sqrt{\frac{5}{77}}$
②	3	5	4	2	$2\sqrt{\frac{143}{23}}$	$\sqrt{\frac{253}{13}}$	$6\sqrt{\frac{11}{299}}$	$15\sqrt{\frac{11}{299}}$	$20\sqrt{\frac{11}{299}}$	$8\sqrt{\frac{11}{299}}$
③	4	6	5	3	$2\sqrt{\frac{133}{13}}$	$\sqrt{\frac{247}{7}}$	$4\sqrt{\frac{19}{91}}$	$8\sqrt{\frac{19}{91}}$	$10\sqrt{\frac{19}{91}}$	$5\sqrt{\frac{19}{91}}$
④	5	7	6	4	$2\sqrt{\frac{899}{59}}$	$\sqrt{\frac{1711}{31}}$	$20\sqrt{\frac{29}{1829}}$	$35\sqrt{\frac{29}{1829}}$	$42\sqrt{\frac{29}{1829}}$	$24\sqrt{\frac{29}{1829}}$

2 円に内接する四角形を対角線で4分割してできる4個の三角形について

円 $O(r)$ に内接する四角形 ABCD の面積を S , 四角形 ABCD の対角線の交点を E, $\triangle EAB$, $\triangle EBC$, $\triangle ECD$, $\triangle EDA$ の面積を順に

$S_i (i=1,2,3,4)$, 内接円を順に $O_i(r_i) (i=1,2,3,4)$ とする。

$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ とおくとき,

(1) S を求めよ。

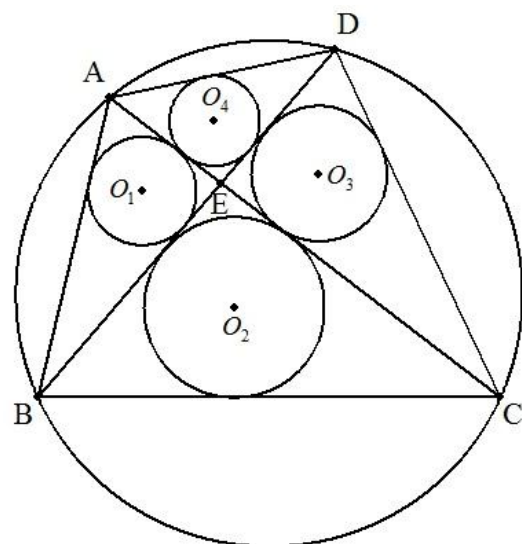
(2) r を求めよ。

(3) $S_i (i=1,2,3,4)$ を求めよ。

(4) $r_i (i=1,2,3,4)$ を求めよ。

(5) 四角形 ABCD が内接円をもつとき, $r_1:r_2:r_3:r_4 = \frac{1}{c}:\frac{1}{d}:\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$

を証明せよ。



(1) 四角形 ABCD の面積を S とする。

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

$$= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad \left(p = \frac{a+b+c+d}{2} \right)$$

(証明)

③より $\cos \theta = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$ であるから

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left\{ \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} \right\}^2 = \frac{\{2(ad + bc)\}^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{\{2(ad + bc)\}^2} \\ &= \frac{(a^2 + 2ad + d^2 - b^2 + 2bc - c^2)(b^2 + 2bc + c^2 - a^2 + 2ad - d^2)}{\{2(ad + bc)\}^2} = \frac{\{(a+d)^2 - (b-c)^2\}\{(b+c)^2 - (a-d)^2\}}{\{2(ad + bc)\}^2} \\ &= \frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{\{2(ad + bc)\}^2} \\ &= \frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{\{2(ad + bc)\}^2} \end{aligned}$$

ここで、 $a+b+c+d = 2p$ とおくと

$$\sin^2 \theta = \frac{(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d)}{\{2(ad + bc)\}^2} = \frac{4(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{(ad + bc)^2}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より、 $\sin \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad + bc} \dots \textcircled{5}$$

よって、四角形 ABCD の面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ad \sin \theta + \frac{1}{2} bc \sin(180^\circ - \theta) = \frac{1}{2} (ad + bc) \sin \theta = \frac{1}{2} (ad + bc) \cdot \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad + bc} \\ &= \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \end{aligned}$$

(2) 四角形 ABCD の外接円の半径を r とする。

$$r = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}$$

(証明) 求める円の半径 r は、 $\triangle ABD$ の外接円の半径に一致するから、正弦定理より

$$2r = \frac{BD}{\sin \theta}$$

これに④、⑤を代入すると

$$\begin{aligned} r &= \frac{BD}{2 \sin \theta} = \frac{\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}}{2 \cdot \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad+bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}} \end{aligned}$$

(3) $\triangle EAB$, $\triangle EBC$, $\triangle ECD$, $\triangle EDA$ の面積を $S_i (i=1,2,3,4)$ とする。

$$S_1 = \frac{da^2bS}{(ab+cd)(ad+bc)}, S_2 = \frac{ab^2cS}{(ab+cd)(ad+bc)}, S_3 = \frac{bc^2dS}{(ab+cd)(ad+bc)}, S_4 = \frac{cd^2aS}{(ab+cd)(ad+bc)}$$

(証明)

$$S_1 : S_2 = da : bc, \quad S_2 : S_3 = ab : cd \text{ より}$$

$$S_1 : S_2 : S_3 = da^2 : abc : c^2d$$

$$\text{さらに, } S_3 : S_4 = bc : da \text{ より}$$

$$S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = da^2b : ab^2c : bc^2d : cd^2a$$

よって

$$S_1 = \frac{da^2b}{da^2b + ab^2c + bc^2d + cd^2a} S = \frac{da^2b}{(ab+cd)(ad+bc)} S$$

$$\text{同様に, } S_2 = \frac{ab^2c}{(ab+cd)(ad+bc)} S, S_3 = \frac{bc^2d}{(ab+cd)(ad+bc)} S, S_4 = \frac{cd^2a}{(ab+cd)(ad+bc)} S$$

(4) $\triangle EAB$, $\triangle EBC$, $\triangle ECD$, $\triangle EDA$ の内接円の半径を $r_i (i=1,2,3,4)$ とする。

$$r_1 = \frac{2dabS}{(ab+cd)(ad+bc) + (b+d)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}$$

$$r_2 = \frac{2abcS}{(ab+cd)(ad+bc) + (a+c)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}$$

$$r_3 = \frac{2bcdS}{(ab+cd)(ad+bc) + (b+d)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}$$

$$r_4 = \frac{2cdaS}{(ab+cd)(ad+bc) + (a+c)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}$$

(証明)

$$\triangle EAB \text{ について, } AB=a, \quad AE=ad\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}, \quad BE=ab\sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}} \text{ である。}$$

$$\text{また, } S_1 = \frac{da^2b}{(ab+cd)(ad+bc)} S \text{ であるから}$$

$$r_1 = \frac{\frac{S_1}{AB + AE + BE}}{2} = \frac{\frac{da^2b}{(ab+cd)(ad+bc)} S}{a + ad \sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}} + ab \sqrt{\frac{ac+bd}{(ab+cd)(ad+bc)}}}$$

$$= \frac{2dabS}{(ab+cd)(ad+bc) + (b+d)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}$$

同様に

$$r_2 = \frac{2abcS}{(ab+cd)(ad+bc) + (a+c)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}$$

$$r_3 = \frac{2bcdS}{(ab+cd)(ad+bc) + (b+d)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}$$

$$r_4 = \frac{2cdaS}{(ab+cd)(ad+bc) + (a+c)\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}$$

(5) 四角形 ABCD が内接円をもつとき, $a+c=b+d$ であるから,

$$(4) \text{より } r_1:r_2:r_3:r_4 = dab:abc:bcd:cda = \frac{1}{c}:\frac{1}{d}:\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$$

■

特に, $\boxed{a=n, b=n+2, c=n+1, d=n-1 (n \geq 2)}$ のとき,

$$S = \sqrt{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(n^2+n-1)(n^2+n+1)(2n^2+2n-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}}$$

$$S_1 = \frac{(n-1)n^2(n+2)}{2(n^2+n+1)(2n^2+2n-1)} S$$

$$S_2 = \frac{(n-1)n(n+2)^2}{2(n^2+n+1)(2n^2+2n-1)} S$$

$$S_3 = \frac{(n-1)(n+1)^2(n+2)}{2(n^2+n+1)(2n^2+2n-1)} S$$

$$S_4 = \frac{(n-1)^2 n(n+1)}{2(n^2+n+1)(2n^2+2n-1)} S$$

$$r_1 = (n-1)n(n+2)h$$

$$r_2 = n(n+1)(n+2)h$$

$$r_3 = (n-1)(n+1)(n+2)h$$

$$r_4 = (n-1)n(n+1)h$$

ただし,

$$h = \frac{S}{(n^2 + n + 1)(2n^2 + 2n - 1) + (2n + 1)\sqrt{(n^2 + n - 1)(n^2 + n + 1)(2n^2 + 2n - 1)}}$$

$$= \frac{-(n^2 + n + 1)(2n^2 + 2n - 1) + (2n + 1)\sqrt{(n^2 + n - 1)(n^2 + n + 1)(2n^2 + 2n - 1)}}{2(n^2 + n + 1)(2n^2 + 2n - 1)S}$$

【例】

	a	b	c	d	$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$	S_1	S_2	S_3	S_4
①	2	4	3	1	$2\sqrt{6}$	$\frac{16\sqrt{6}}{77}$	$\frac{96\sqrt{6}}{77}$	$\frac{36\sqrt{6}}{77}$	$\frac{6\sqrt{6}}{77}$
②	3	5	4	2	$2\sqrt{30}$	$\frac{90\sqrt{30}}{299}$	$\frac{300\sqrt{30}}{299}$	$\frac{160\sqrt{30}}{299}$	$\frac{48\sqrt{30}}{299}$
③	4	6	5	3	$2\sqrt{10}$	$\frac{96\sqrt{10}}{91}$	$\frac{240\sqrt{10}}{91}$	$\frac{150\sqrt{10}}{91}$	$\frac{60\sqrt{10}}{91}$
④	5	7	6	4	$2\sqrt{210}$	$\frac{700\sqrt{210}}{1829}$	$\frac{1470\sqrt{210}}{1829}$	$\frac{1008\sqrt{210}}{1829}$	$\frac{480\sqrt{210}}{1829}$

	a	b	c	d	r	次の値を k とおくと	r_1	r_2	r_3	r_4
①	2	4	3	1	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{385}{6}}$	$\frac{-77 + 5\sqrt{385}}{154\sqrt{6}}$	$4k$	$12k$	$6k$	$3k$
②	3	5	4	2	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3289}{30}}$	$\frac{-299 + 7\sqrt{3289}}{598\sqrt{30}}$	$15k$	$30k$	$20k$	$12k$
③	4	6	5	3	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1729}{10}}$	$\frac{-91 + 3\sqrt{1729}}{182\sqrt{10}}$	$12k$	$20k$	$15k$	$10k$
④	5	7	6	4	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{53041}{210}}$	$\frac{-1829 + 11\sqrt{53041}}{3658\sqrt{210}}$	$70k$	$105k$	$84k$	$60k$

(2012/7/31 時岡)

(2012/9/23 時岡)