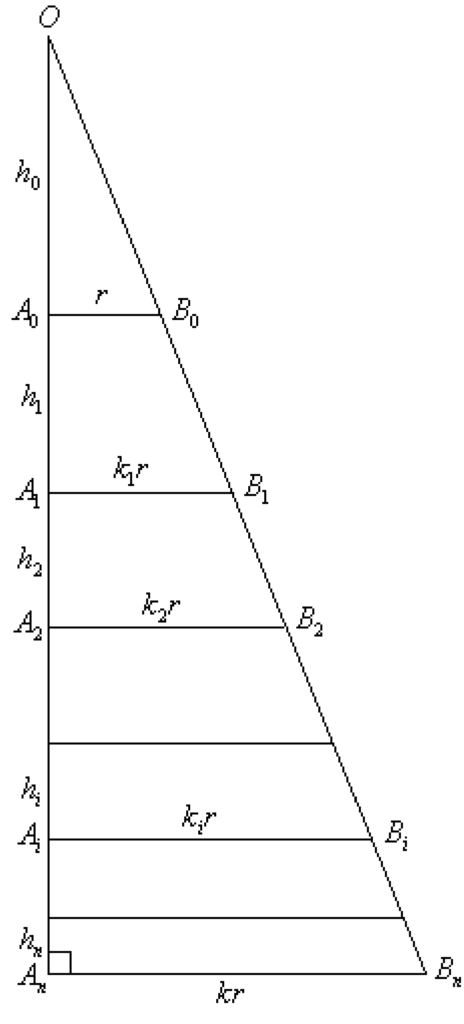
【円錐台の n 等分】
上底の半径 r，下底の半径 $kr(k>1)$，高さが h の円錐台を体積が等しくなるように，上底に平行な $(n-1)$ 個の平面で n 等分したとき，n 個の円錐台の高さをそれぞれ求めよ。

（解）上底の中心を A_0，下底の中心を A_n，母線を B_0B_n とする。円錐台を上底に平行な $(n-1)$ 個の平面で n 等分したときの $(n-1)$ 個の切り口の円の中心を上から順に $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$ とする。また，円錐台の中心線 A_nA_0 と母線 B_nB_0 との交点を O とする。また，線分 A_0A_n と B_0B_n を含む平面で円錐台を切るとき，上底に平行な $(n-1)$ 個の平面と母線との交点を上から順に $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}$ とする。

仮定より，$A_0B_0 = r, A_nB_n = kr, A_0A_n = h$ となる。

今，$OA_0 = h_0, A_{i-1}A_i = h_i, A_iB_i = k_ir \quad (i = 1,2,\cdots,n)$ とおく。

ただし，$k_n = k$。



$\Delta OA_0B_0 \propto \Delta OA_nB_n$ であるから

$h_0 : r = (h_0 + h) : kr$，$h_0kr = r(h_0 + h)$ より

$$h_0 = \frac{h}{k-1}$$

$\Delta OA_0B_0 \propto \Delta OA_1B_1$ であるから

$h_0 : r = (h_0 + h_1) : k_1r$，$h_0k_1r = r(h_0 + h_1)$ より

$$h_1 = (k_1 - 1)h_0 = \frac{k_1 - 1}{k-1}h$$

同様に，$\Delta OA_0B_0 \propto \Delta OA_2B_2$ であるから

$h_0 : r = (h_0 + h_1 + h_2) : k_2r$，$h_0k_2r = r(h_0 + h_1 + h_2)$ より

$$h_2 = (k_2 - 1)h_0 - h_1 = \frac{k_2 - 1}{k-1}h - \frac{k_1 - 1}{k-1}h = \frac{k_2 - k_1}{k-1}h$$

同様に，$\Delta OA_0B_0 \propto \Delta OA_iB_i$ であるから

$$h_i = \frac{k_i - k_{i-1}}{k-1}h \quad (i = 2,3,\cdots,n) \quad \cdots ①$$

与えられた円錐台の体積を V，n 等分した円錐台の体積を上から順に $V_1, V_2, \cdots, V_n$ とおくと，

$V_i = \dfrac{1}{n}V \quad (i = 1,2,\cdots,n)$ である。

$$V_1=\frac{\pi}{3}\left\{r^2+r\cdot k_1r+(k_1r)^2\right\}h_1=\frac{\pi}{3}\left(k_1{}^2+k_1+1\right)r^2\cdot\frac{k_1-1}{k-1}h=\frac{\pi\left(k_1{}^3-1\right)r^2h}{3(k-1)}$$

$$V_2=\frac{\pi}{3}\left\{(k_1r)^2+k_1r\cdot k_2r+(k_2r)^2\right\}h_2=\frac{\pi}{3}\left(k_2{}^2+k_2k_1+k_1{}^2\right)r^2\cdot\frac{k_2-k_1}{k-1}h=\frac{\pi\left(k_2{}^3-k_1{}^3\right)r^2h}{3(k-1)}$$

同様に，$V_i=\dfrac{\pi\left(k_i{}^3-k_{i-1}{}^3\right)r^2h}{3(k-1)}$

また，$V=\dfrac{\pi}{3}\left\{r^2+r\cdot kr+(kr)^2\right\}h=\dfrac{\pi}{3}\left(k^2+k+1\right)r^2h$　である。

$V_1=\dfrac{1}{n}V\quad(i=1,2,\cdots,n)$であるから

$\dfrac{\pi\left(k_1{}^3-1\right)r^2h}{3(k-1)}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\pi}{3}\left(k^2+k+1\right)r^2h$ より

$k_1{}^3-1=\dfrac{k^3-1}{n}$，$k_1{}^3=\dfrac{k^3+n-1}{n}$,

$\therefore\quad k_1=\sqrt[3]{\dfrac{k^3+n-1}{n}}$

$V_2=\dfrac{1}{n}V\quad(i=1,2,\cdots,n)$であるから

$\dfrac{\pi\left(k_2{}^3-k_1{}^3\right)r^2h}{3(k-1)}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\pi}{3}\left(k^2+k+1\right)r^2h$ より

$k_2{}^3-k_1{}^3=\dfrac{k^3-1}{n}$，$k_2{}^3=k_1{}^3+\dfrac{k^3-1}{n}=\dfrac{k^3+n-1}{n}+\dfrac{k^3-1}{n}=\dfrac{2k^3+n-2}{n}$,

$\therefore\quad k_2=\sqrt[3]{\dfrac{2k^3+n-2}{n}}$

同様に，$V_i=\dfrac{1}{n}V\quad(i=3,4,\cdots,n)$であるから

$\therefore\quad k_i=\sqrt[3]{\dfrac{ik^3+n-i}{n}}$

これを①に代入すると

$$h_i=\frac{\sqrt[3]{\dfrac{ik^3+n-i}{n}}-\sqrt[3]{\dfrac{(i-1)k^3+n-(i-1)}{n}}}{k-1}h=\frac{\sqrt[3]{ik^3+n-i}-\sqrt[3]{(i-1)k^3+n-(i-1)}}{(k-1)\sqrt[3]{n}}h$$

よって，n 等分した円錐台の高さを上から順に，$h_1,h_2,\cdots,h_n$ とすると

$$h_i=\frac{\sqrt[3]{ik^3+n-i}-\sqrt[3]{(i-1)k^3+n-(i-1)}}{(k-1)\sqrt[3]{n}}h \quad (i=1,2,\cdots,n) \quad \cdots \text{（答）}$$

（補足）この結果より，上底，下底の半径そのものの長さは高さに無関係で，上底と下底の半径の比（k）が高さに関係することが分かる。

【例】上底の円周が二尺五寸，下底の円周が五尺，高さが三間の円錐台を，体積が等しくなるように三等分したとき，それぞれの高さはいくつか。＜吉田光由著「塵劫記」巻末の遺題から＞

（解）まず，一間＝六尺，一尺＝十寸である。

円周の長さは半径の長さに比例するので，$k=2$。また，$n=3, h=3$ の場合であるから

$$h_i=\frac{\sqrt[3]{8i+3-i}-\sqrt[3]{8(i-1)+3-(i-1)}}{(2-1)\sqrt[3]{3}}\cdot 3=\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{7i+3}-\sqrt[3]{7i-4}\right)$$

よって

$h_1=\sqrt[3]{90}-3=1.4814$間 ≒ 一間二尺九寸強

$h_2=\sqrt[3]{153}-\sqrt[3]{90}=0.867076$間 ≒ 五尺二寸強 ･･･（答）

$h_3=6-\sqrt[3]{153}=0.651519$間 ≒ 三尺九寸弱

（2011/4/2　時岡）