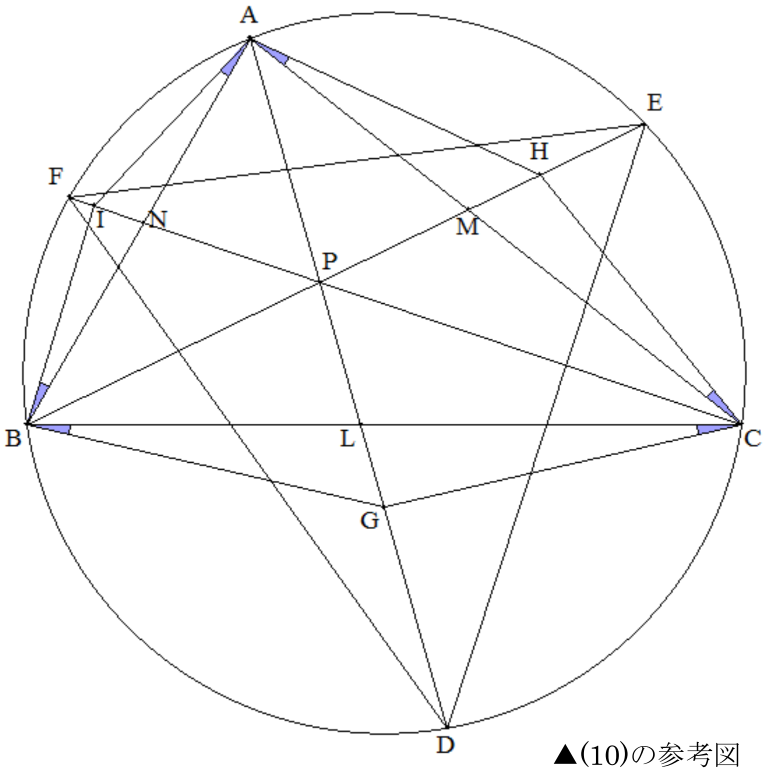
△ABC の外接円に内接する種々の△DEF について，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値



▲(10)の参考図

点 P を△ABC 内の点とし，AP，BP，CP をそれぞれ延長し，△ABC の外接円との交点をそれぞれ D，E，F とする。また，AD と BC，BE と CA，CF と AB との交点をそれぞれ L，M，N とする。次の種々の点 P に対して，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値を 3 辺 a,b,c と $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ を用いて表せ。ただし，(7)については，S ＝△ABC の使用も可とする。また，(10)については，さらに $d=4S\cot\theta$ の使用も可とする（二等辺三角形を△ABC の外側に作ったときは低角を θ，内側に作ったときは低角を $-\theta$ とする。）

(1) 点 P は外心

(2) 点 P は重心

(3) 点 P は内心

(4) 点 P は垂心

(5) 点 P は Gergonne（ジェルゴンヌ）点。
AL，BM，CN の交点（L，M，N は内接円の接点）

(6) 点 P は Nagel（ナーゲル）点。AL，BM，CN の交点（L，M，N は傍接円の接点）

(7) 点 P は Fermat（フェルマー）点。∠BPC＝∠CPA＝∠APB を満たす。

(8) 点 P は第 1Brocard（ブロカール）点。∠PAB＝∠PBC＝∠PCA を満たす。（なお，∠PAC＝∠PBA＝∠PCB を満たす点 P を第 2Brocard 点といい，結果は第 1 の場合と同じである。）

(9) 点 P は Lemoine（ルモワーヌ）点。△ABC において，中線を角の二等分線に関して折り返した 3 つの直線は 1 点 P で交わる。（この点を類似重心ともいう。）

(10) 点 P は Kiepert（キーペルト）点。△ABC の各辺を底辺とする相似な二等辺三角形 GCB，HAC，IBA をつくると，3 直線 AG，BH，CI は 1 点 P で交わる。

1　求め方

△DEF≡△ABC となる場合を除く。

△DEF＝△PEF＋△PFD＋△PDE である。

△PEF の求め方は次の 2 通り考えられる。

[1]　△PEF＝$\dfrac{1}{2}PE\cdot PF\sin\angle EPF$

[2]　△PEF＝$\dfrac{PE^2}{PC^2}$△PCB（∵△PEF∽△PCB より△PEF : △PCB＝PE^2 : PC^2 であるから）

予め，AL＝l，BM=m，CN＝n とおいておく。

i.　メネラウスの定理で，AP : PL を求めると，AP，PL，△PBC : △ABC が求められる。

ii.　方べきの定理で LD を求めると，PD=PL+LD。

iii.　$\sin\angle EPF$ の値は点 P の種類によって求め方は様々である。

PD が求められると，PE，PF は a,b,c をローテーションして求めることができる。

また，AP が求められると CP も a,b,c をローテーションして求めることができる。

実際，種々の場合について，次のように求めた。

合同になる場合	(1)外心，(8)Brocard 点
[1]の方法	(3)内心，(4)垂心，(7)Fermat 点
[2]の方法	(2)重心，(5)Gergonne 点，(6)Nagel 点，(9)Lemoine 点（類似重心）(10)Kiepert 点

2　解答例

(1) 点 P が外心のとき

P は外心であるから，

PA＝PB＝PC＝PD＝PE＝PF（△ABC の外接円の半径）

△PEF と△PBC について，∠EPF=∠BPC（対頂角）であるから，

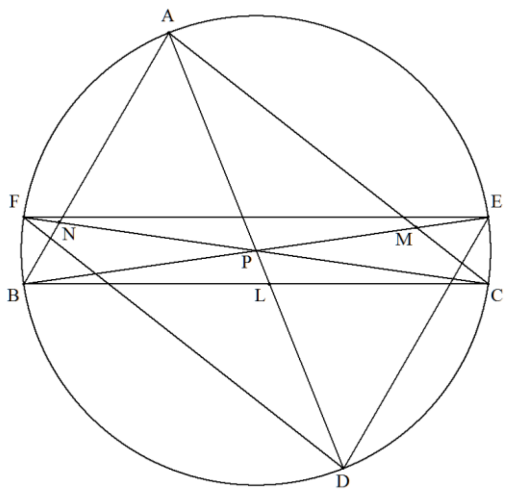
△PEF≡△PBC より，EF=BC

同様に，FD=CA，DE=AB

従って，△DEF と△ABC について，3 辺がそれぞれ等しいから，

△DEF≡△ABC

よって　$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=1\cdots$（答）



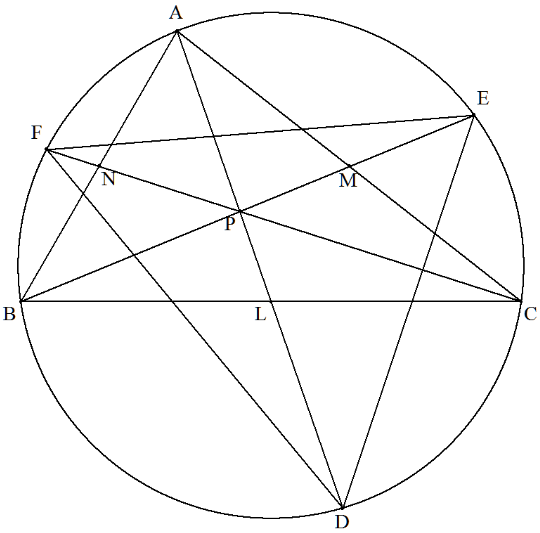
(2) 点 P が重心のとき

AL＝l，BM=m，CN＝n とおく。

中線定理より　$b^2+c^2=2\left\{l^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2\right\}$　$\therefore l^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$　同様に，$m^2=\frac{2c^2+2a^2-b^2}{4}$，$n^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$

P は△ABC の重心であるから，AP＝$\frac{2}{3}l$，PL＝$\frac{1}{3}l$，BP=$\frac{2}{3}m$，PM=$\frac{1}{3}m$，CP=$\frac{2}{3}n$，PN＝$\frac{1}{3}n$

方べきの定理より　AL・LD=BL・LC



∴LD＝$BL\cdot LC\cdot\frac{1}{AL}=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{l}=\frac{a^2}{4l}$

PD＝PL＋LD

$$=\frac{1}{3}l+\frac{a^2}{4l}=\frac{4l^2+3a^2}{12l}=\frac{4\times\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}+3a^2}{12l}=\frac{a^2+b^2+c^2}{6l}$$

同様に，PE$=\frac{a^2+b^2+c^2}{6m}$，PF$=\frac{a^2+b^2+c^2}{6n}$

△PEF∽△PCB であるから

△PEF＝$\frac{PE^2}{PC^2}$△PCB

$$=\frac{\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6m}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}n\right)^2}\times\frac{1}{3}S=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{48m^2n^2}S$$

同様に，△PFD$=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{48n^2l^2}S$，△PDE$=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{48l^2m^2}S$

△DEF＝△PEF＋△PFD＋△PDE

$$=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{48}S\times\left(\frac{1}{m^2n^2}+\frac{1}{n^2l^2}+\frac{1}{l^2m^2}\right)=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{48}S\times\frac{l^2+m^2+n^2}{l^2m^2n^2}$$

$$=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{48}S\times\frac{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}+\frac{2c^2+2a^2-b^2}{4}+\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}}{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}\times\frac{2c^2+2a^2-b^2}{4}\times\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}}=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{\left(2b^2+2c^2-a^2\right)\left(2c^2+2a^2-b^2\right)\left(2a^2+2b^2-c^2\right)}S$$

よ　　　　　　　　っ　　　　　　　　て

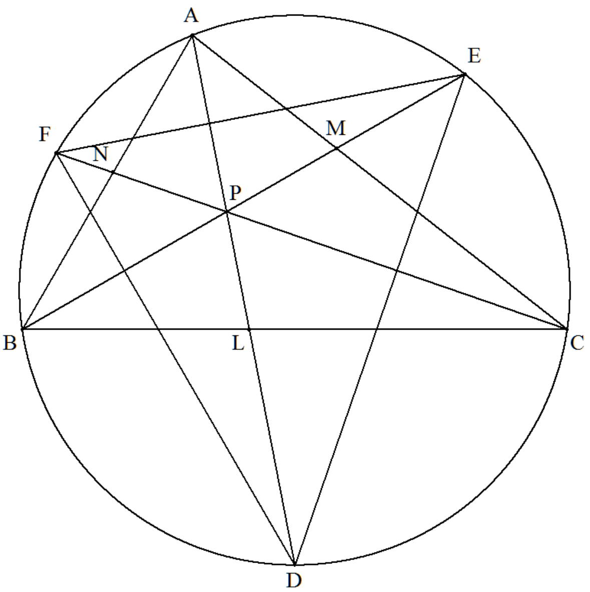
$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{\left(2b^2+2c^2-a^2\right)\left(2c^2+2a^2-b^2\right)\left(2a^2+2b^2-c^2\right)}\cdots$$（答）

(3) 点 P が内心のとき

まず，AL を求める。

△ABL＋△ACL＝△ABC であるから

$$\frac{1}{2}cAL\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bAL\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\times 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$



$\therefore\ AL=\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$

△ABC について，AL は∠A の二等分線であるから

$BL=\dfrac{c}{b+c}\cdot a$，　$CL=\dfrac{b}{b+c}\cdot a$

方べきの定理より　AL・LD＝BL・LC

∴LD＝ $BL\cdot LC\cdot\dfrac{1}{AL}=\dfrac{ac}{b+c}\times\dfrac{ab}{b+c}\times\dfrac{1}{\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}}=\dfrac{a^2}{2(b+c)\cos\dfrac{A}{2}}$

△ABL について，BP は∠ABL の二等分線であるから

$$PL=\frac{BL}{BL+c}\times AL=\frac{\dfrac{ac}{b+c}}{\dfrac{ac}{b+c}+c}\times\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}=\frac{2abc}{(b+c)(a+b+c)}\cos\frac{A}{2}$$

$$PD=PL+LD=\frac{2abc}{(b+c)(a+b+c)}\cos\frac{A}{2}+\frac{a^2}{2(b+c)\cos\dfrac{A}{2}}=\frac{4abc\cos^2\dfrac{A}{2}+a^2(a+b+c)}{2(b+c)(a+b+c)\cos\dfrac{A}{2}}$$

分子 $=2abc(1+\cos A)+a^2(a+b+c)=2abc\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)+a^2(a+b+c)=a(b+c)(a+b+c)$

$PD=\dfrac{a(b+c)(a+b+c)}{2(b+c)(a+b+c)\cos\dfrac{A}{2}}=\dfrac{a}{2\cos\dfrac{A}{2}}=\dfrac{a\sin\dfrac{A}{2}}{\sin A}=2R\sin\dfrac{A}{2}$　同様に，$PE=2R\sin\dfrac{B}{2}$，　$PF=2R\sin\dfrac{C}{2}$

次に，∠EPF＝∠EPA＋∠APF＝$\dfrac{A+B}{2}+\dfrac{C+A}{2}=\dfrac{A}{2}+\dfrac{A+B+C}{2}=\dfrac{A}{2}+90^\circ$ であるから

△PEF＝$\dfrac{1}{2}\times 2R\sin\dfrac{B}{2}\times 2R\sin\dfrac{C}{2}\times\sin\left(\dfrac{A}{2}+90^\circ\right)=2R^2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}$

ここで，$\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$，　$\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

より，$\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}$，　$\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ であるから

△PEF＝$2R^2\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}=2R^2\times\dfrac{(s-a)\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{abc}=2R^2\times\dfrac{s-a}{abc}S=2R^2\times\dfrac{s-a}{abc}\times\dfrac{abc}{4R}$

$=\dfrac{R}{2}(s-a)$　同様に，△PFD$=\dfrac{R}{2}(s-b)$，△PDE$=\dfrac{R}{2}(s-c)$

よって，△DEF＝△PEF＋△PFD＋△PDE＝$\dfrac{R}{2}(s-a)+\dfrac{R}{2}(s-b)+\dfrac{R}{2}(s-c)=\dfrac{R}{2}\{3s-(a+b+c)\}=\dfrac{R}{2}s=\dfrac{R}{2r}S$

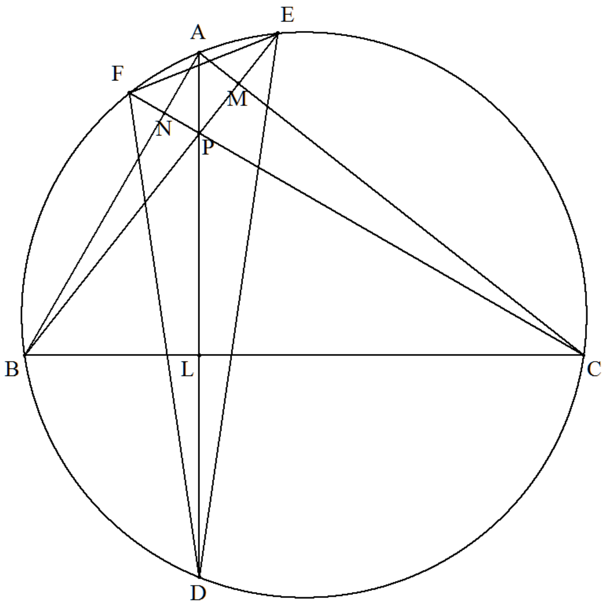
従って，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{R}{2r}=\dfrac{\dfrac{abc}{4S}}{2\cdot\dfrac{S}{s}}=\dfrac{abcs}{8S^2}=\dfrac{abcs}{8s(s-a)(s-b)(s-c)}=\dfrac{abc}{8(s-a)(s-b)(s-c)}$ …（答）

(4) 点 P が垂心のとき

△PBL∽△PAM より，∠PBL＝∠PAM＝∠DBL（円周角）　∴△PBL≡△DBL

PL＝DL より

PD＝2PL＝ $2\times BL\tan(90°-C)=2\times c\cos B\times\dfrac{\cos C}{\sin C}=4R\cos B\cos C$



同様に，PE＝ $4R\cos C\cos A$，PF＝ $4R\cos A\cos B$

△PEF について，∠EPF＝ $180°-A$

△PEF= $\dfrac{1}{2}PE\cdot PF\sin(180°-A)$

$=\dfrac{1}{2}\times 4R\cos C\cos A\times 4R\cos A\cos B\times\sin A$

$=4R^2\cos A\cos B\cos C\sin 2A$

同様に，

△PFD= $4R^2\cos A\cos B\cos C\sin 2B$,

△PDE= $4R^2\cos A\cos B\cos C\sin 2C$

よって，

△DEF＝△PEF＋△PFD+△PDE

$=4R^2\cos A\cos B\cos C(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

ここで，

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin 2C=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}=2\sin C\times(-2)\sin A\sin(-B)=4\sin A\sin B\sin C$ であるから

△DEF $=4R^2\cos A\cos B\cos C\times 4\sin A\sin B\sin C$

また，正弦定理より， $b=2R\sin B, c=2R\sin C$ であるから

$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 2R\sin B\times 2R\sin C\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C$ より

△DEF $=8S\cos A\cos B\cos C=8\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\times\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}S=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2c^2}S$

よって　$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2c^2}\cdots$（答）

（別解）L，M，N はそれぞれ PD，PE，PF の中点（∵△BPL≡△BDL より PL＝DL，他も同様)。

△DFE∽△LMN で，相似比は 2：1 であるから，△DFE=4△LMN

BL＝ $c\cos B$，CE= $a\cos C$，AF= $b\cos A$ であるから，$\dfrac{\triangle LMN}{\triangle ABC}=\dfrac{2c\cos B\times a\cos C\times b\cos A}{a\times b\times c}=2\cos A\cos B\cos C$

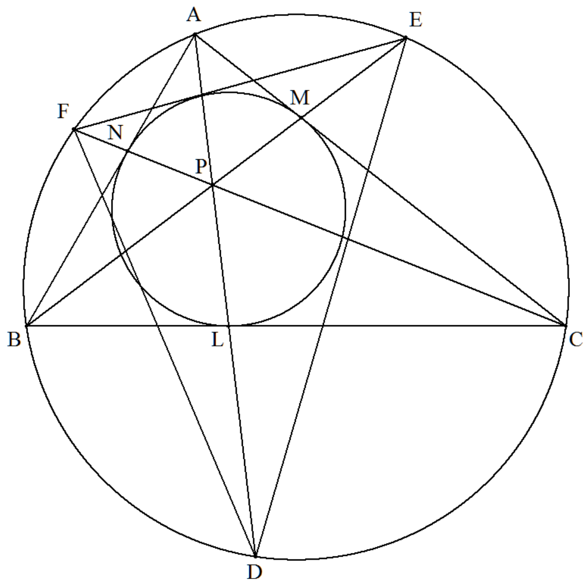
よって，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=4\times 2\cos A\cos B\cos C=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2c^2}\cdots$（答）

(5) 点Ｐがジェルゴンヌ点のとき

L，M，N は内接円との接点であるから，AM＝AN＝ $s-a$ ，BN＝BL＝ $s-b$ ，CL＝CM＝ $s-c$ である。

$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=\frac{s-a}{s-b}\cdot\frac{s-b}{s-c}\cdot\frac{s-c}{s-a}=1$ より，AL，BM，CN は 1 点 P で交わる（チェバの定理の逆)。

AL＝ l ，BM= m ，CN＝ n とおく。



$\angle ALB+\angle ALC=180^\circ$ であるから， $\cos\angle ALB+\cos\angle ALC=0$

余弦定理より $\frac{l^2+(s-b)^2-c^2}{2l(s-b)}+\frac{l^2+(s-c)^2-b^2}{2l(s-c)}=0$

$$(s-c)\{l^2+(s-b-c)(s-b+c)\}+(s-b)\{l^2+(s-c-b)(s-c+b)\}=0$$

$$(2s-b-c)l^2=(s-c)(s-a)(s+c-b)+(s-b)(s-a)(s+b-c)$$

$$\begin{aligned}al^2&=(s-a)\{(s-c)(s+c-b)+(s-b)(s+b-c)\}\\&=(s-a)\{2s^2-(b+c)s-b^2+2bc-c^2\}\\&=(s-a)\{2s^2-(2s-a)s-(b-c)^2\}\\&=(s-a)\{as-(b-c)^2\}\end{aligned}$$

$\therefore\ l^2=\frac{(s-a)\{as-(b-c)^2\}}{a}$ 　同様に　 $m^2=\frac{(s-b)\{bs-(c-a)^2\}}{b}$ ，

$n^2=\frac{(s-c)\{cs-(a-b)^2\}}{c}$

メネラウスの定理より　 $\frac{AP}{PL}\cdot\frac{LB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$ ， $\frac{AP}{PL}\cdot\frac{s-b}{a}\cdot\frac{s-c}{s-a}=1$ ， $\frac{AP}{PL}=\frac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)}$

$\therefore\ AP=\frac{a(s-a)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)}l$ ， $PL=\frac{(s-b)(s-c)}{a(s-a)+(s-b)(s-c)}l$

同様に， $BP=\frac{b(s-b)}{b(s-b)+(s-c)(s-a)}m$ ， $PM=\frac{(s-c)(s-a)}{b(s-b)+(s-c)(s-a)}m$

$CP=\frac{c(s-c)}{c(s-c)+(s-a)(s-b)}n$ ， $PN=\frac{(s-a)(s-b)}{c(s-c)+(s-a)(s-b)}n$

ここで， $a(s-a)+(s-b)(s-c)=\frac{1}{4}\left(2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2\right)$ は a,b,c について対称式であるから，

$a(s-a)+(s-b)(s-c)=b(s-b)+(s-c)(s-a)=c(s-c)+(s-a)(s-b)=d$ とおく。

$AP=\frac{a(s-a)}{d}l$ ， $PL=\frac{(s-b)(s-c)}{d}l$ ， $BP=\frac{b(s-b)}{d}m$ ， $PM=\frac{(s-c)(s-a)}{d}m$ ， $CP=\frac{c(s-c)}{d}n$ ， $PN=\frac{(s-a)(s-b)}{d}n$

方べきの定理より　 $AL\cdot DL=BL\cdot CL$

$\therefore\ DL=\frac{BL\cdot CL}{AL}=\frac{(s-b)(s-c)}{l}$ 　同様に， $EM=\frac{(s-c)(s-a)}{m}$ ， $FN=\frac{(s-a)(s-b)}{n}$

$$PD=PL+DL=\frac{(s-b)(s-c)}{d}l+\frac{(s-b)(s-c)}{l}=\frac{(s-b)(s-c)(l^2+d)}{dl}$$

ここで， $l^2+d=\frac{(s-a)\{as-(b-c)^2\}}{a}+a(s-a)+(s-b)(s-c)=\frac{1}{a}\left[as(s-a)-(s-a)(b-c)^2+a^2(s-a)+a(s-b)(s-c)\right]$

$$=\frac{1}{a}\left[a\{s(s-a)+(s-b)(s-c)\}+(s-a)(a-b+c)(a+b-c)\right]=\frac{1}{a}\left[a\left\{2s^2-(a+b+c)s+bc\right\}+(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)\right]$$

$$=\frac{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)}{a}$$

よって，$PD=\dfrac{(s-b)(s-c)}{dl}\times\dfrac{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)}{a}=\dfrac{(s-b)(s-c)\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}}{adl}$

同様に，$PE=\dfrac{(s-c)(s-a)\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}}{bdm}$，　$PF=\dfrac{(s-a)(s-b)\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}}{cdn}$

ただし，$d=a(s-a)+(s-b)(s-c)=b(s-b)+(s-c)(s-a)=c(s-c)+(s-a)(s-b)$

$\dfrac{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)}{d}$は定数であるから，$\dfrac{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)}{d}=k$とおくと，

$PD=\dfrac{(s-b)(s-c)}{al}k$，　$PE=\dfrac{(s-c)(s-a)}{bm}k$，　$PF=\dfrac{(s-a)(s-b)}{cn}k$と表される。

ところで，$\dfrac{AP}{PL}=\dfrac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)}$であるから，△PBC＝$\dfrac{(s-b)(s-c)}{d}S$　（$d=a(s-a)+(s-b)(s-c)$）

従って，△PEF＝$\dfrac{PE^2}{PC^2}$△PCB＝$\dfrac{\left\{\dfrac{(s-c)(s-a)}{bm}k\right\}^2}{\left\{\dfrac{c(s-c)}{d}n\right\}^2}\times\dfrac{(s-b)(s-c)}{d}S=\dfrac{(s-a)^2(s-b)(s-c)dk^2}{b^2c^2m^2n^2}S$

$$=\frac{(s-a)^2(s-b)(s-c)d\left\{\dfrac{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)}{d}\right\}^2}{b^2c^2\cdot\dfrac{(s-b)\left\{bs-(c-a)^2\right\}}{b}\cdot\dfrac{(s-c)\left\{cs-(a-b)^2\right\}}{c}}S=\frac{(s-a)^2\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}^2}{bcd\left\{bs-(c-a)^2\right\}\left\{cs-(a-b)^2\right\}}S$$

同様に，△PFD＝$\dfrac{(s-b)^2\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}^2}{cad\left\{cs-(a-b)^2\right\}\left\{as-(b-c)^2\right\}}S$，△PDE＝$\dfrac{(s-c)^2\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}^2}{abd\left\{as-(b-c)^2\right\}\left\{bs-(c-a)^2\right\}}S$

△DEF

$$=\frac{(s-a)^2\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}^2S}{bcd\left\{bs-(c-a)^2\right\}\left\{cs-(a-b)^2\right\}}+\frac{(s-b)^2\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}^2S}{cad\left\{cs-(a-b)^2\right\}\left\{as-(b-c)^2\right\}}+\frac{(s-c)^2\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}^2S}{abd\left\{as-(b-c)^2\right\}\left\{bs-(c-a)^2\right\}}$$

$$=\frac{\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}^2\left[a(s-a)^2\left\{as-(b-c)^2\right\}+b(s-b)^2\left\{bs-(c-a)^2\right\}+c(s-c)^2\left\{cs-(a-b)^2\right\}\right]}{abcd\left\{as-(b-c)^2\right\}\left\{bs-(c-a)^2\right\}\left\{cs-(a-b)^2\right\}}S$$

（分子の大括弧の中）※因数分解できる！

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\left(2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2\right)\left(\sum a^2b-\sum a^3\right)=\frac{1}{2}d\{2abc+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\}$$

$$=\frac{1}{2}d\{2abc+8(s-a)(s-b)(s-c)\}=d\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}$$

△DEF＝$\dfrac{\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}^2\times d\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}}{abcd\left\{as-(b-c)^2\right\}\left\{bs-(c-a)^2\right\}\left\{cs-(a-b)^2\right\}}S=\dfrac{\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}^3}{abc\left\{as-(b-c)^2\right\}\left\{bs-(c-a)^2\right\}\left\{cs-(a-b)^2\right\}}S$

よって，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}^3}{abc\left\{as-(b-c)^2\right\}\left\{bs-(c-a)^2\right\}\left\{cs-(a-b)^2\right\}}\cdots$（答）

（補足）$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\times\dfrac{a}{2R}=\dfrac{abc}{4R}$より　$abc=4RS$（Rは△ABCの外接円の半径），

また，ヘロンの公式から， $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ より $(s-a)(s-b)(s-c)=\dfrac{S^2}{s}=rS$ （r は△ABC の内接円の半径）

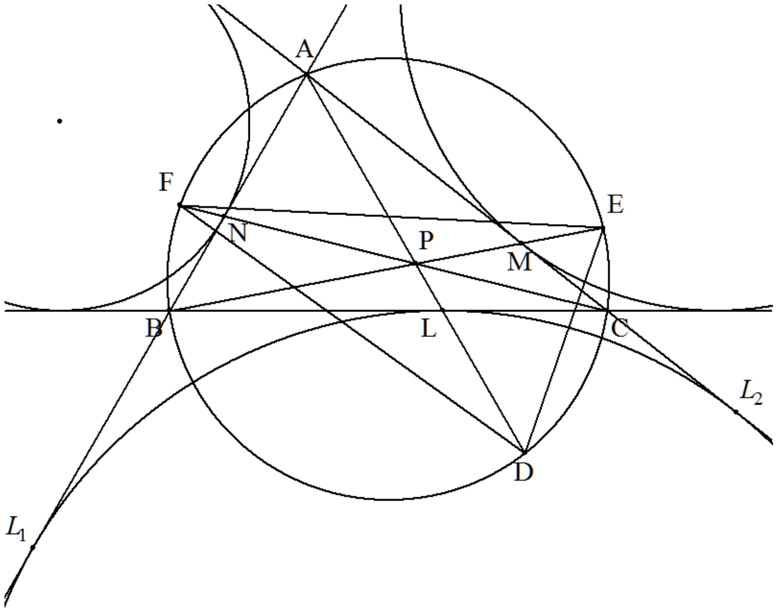
であるから，（分子の中括弧の中） $abc+4(s-a)(s-b)(s-c)=4RS+4rS=4(R+r)S$ と表すこともできる。

$$\left(\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{\{4(R+r)S\}^3}{abc\{as-(b-c)^2\}\{bs-(c-a)^2\}\{cs-(a-b)^2\}}=\frac{16(R+r)^3S^2}{R\{as-(b-c)^2\}\{bs-(c-a)^2\}\{cs-(a-b)^2\}}\right)$$

(6) 点 P がナーゲル点のとき

L, M, N は傍接円との接点であるから，BN＝CM＝$s-a$，CL＝AN＝$s-b$，AM＝BL＝$s-c$ である。

（∵）



∠A内の傍接円とAB，ACとの接点をそれぞれL_1, L_2とする。

$$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=\mathrm{AB}+(\mathrm{BL}+\mathrm{LC})+\mathrm{CA}$$
$$=(\mathrm{AB}+\mathrm{BL_1})+(\mathrm{CL_2}+\mathrm{CA})=\mathrm{AL_1}+\mathrm{AL_2}$$
$$=2\mathrm{AL_1}=a+b+c=2s$$ とおくと，
$$\mathrm{AL_1}=s=\frac{a+b+c}{2}$$
$$\mathrm{BL}=\mathrm{BL_1}=\mathrm{AL_1}-\mathrm{AB}=s-c,$$
$$\mathrm{CL}=a-(s-c)=s-b$$
他も同様。

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=\frac{s-b}{s-a}\cdot\frac{s-c}{s-b}\cdot\frac{s-a}{s-c}=1$$ より，

AL，BM，CN は 1 点 P で交わる（チェバの定理の逆）。

AL＝l，BM=m，CN＝n とおく。

$\angle ALB+\angle ALC=180^\circ$ であるから， $\cos\angle ALB+\cos\angle ALC=0$

余弦定理より　$\dfrac{l^2+(s-c)^2-c^2}{2l(s-c)}+\dfrac{l^2+(s-b)^2-b^2}{2l(s-b)}=0$， $(s-b)(l^2+s^2-2cs)+(s-c)(l^2+s^2-2bs)=0$

移項すると　$(2s-b-c)l^2=(s-b)s(2c-s)+(s-c)s(2b-s)$

$$al^2=s\{(s-b)(2c-s)+(s-c)(2b-s)\}=s\{-2s^2+3(b+c)s-4bc\}=s\left\{-2\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2+3(b+c)\times\frac{a+b+c}{2}-4bc\right\}$$
$$=\frac{s}{2}\{-a^2+(b+c)a+2(b-c)^2\}=\frac{s}{2}\{a\times2(s-a)+2(b-c)^2\}=s\{a(s-a)+(b-c)^2\}$$

$\therefore\ l^2=\dfrac{s\{a(s-a)+(b-c)^2\}}{a}$　同様に　$m^2=\dfrac{s\{b(s-b)+(c-a)^2\}}{b}$， $n^2=\dfrac{s\{c(s-c)+(a-b)^2\}}{c}$

メネラウスの定理より　$\dfrac{AP}{PL}\cdot\dfrac{LB}{BC}\cdot\dfrac{CM}{MA}=1$， $\dfrac{AP}{PL}\cdot\dfrac{s-c}{a}\cdot\dfrac{s-a}{s-c}=1$， $\dfrac{AP}{PL}=\dfrac{a}{s-a}\cdots$①　であるから

$$AP=\frac{a}{a+(s-a)}l=\frac{a}{s}l,\quad PL=\frac{s-a}{a+(s-a)}l=\frac{s-a}{s}l$$

同様に， $BP=\dfrac{b}{s}m$， $PM=\dfrac{s-b}{s}m$ ； $CP=\dfrac{c}{s}n$， $PN=\dfrac{s-c}{s}n$

方べきの定理より　$AL\cdot LD=BL\cdot LC$　$\therefore\ LD=\dfrac{BL\cdot LC}{AL}=\dfrac{(s-c)(s-b)}{l}$

$$PD=PL+LD=\frac{s-a}{s}l+\frac{(s-b)(s-c)}{l}=\frac{(s-a)l^2+s(s-b)(s-c)}{sl}=\frac{1}{sl}\left[(s-a)\times\frac{s\{a(s-a)+(b-c)^2\}}{a}+s(s-b)(s-c)\right]$$
$$=\frac{1}{al}\left[(s-a)\{a(s-a)+(b-c)^2\}+a(s-b)(s-c)\right]=\frac{1}{al}\{a(s-a)^2+(s-a)(b-c)^2+a(s-b)(s-c)\}$$

$$=\frac{1}{al}\left[a\{(s-a)^2+(s-b)(s-c)\}+(s-a)(b-c)^2\right]=\frac{1}{al}\left[a\{2s^2-(2a+b+c)s+a^2+bc\}+(s-a)(b-c)^2\right]$$

$$=\frac{1}{al}\left[a\{2s^2-(a+2s)s+a^2+bc\}+(s-a)(b-c)^2\right]=\frac{1}{al}\left[a\{-a(s-a)+bc\}+(s-a)(b-c)^2\right]$$

$$=\frac{1}{al}\left\{-a^2(s-a)+abc+(s-a)(b-c)^2\right\}=\frac{1}{al}\{abc+(s-a)(b-c+a)(b-c-a)\}=\frac{abc-4(s-a)(s-b)(s-c)}{al}$$

$\therefore PD=\dfrac{abc-4(s-a)(s-b)(s-c)}{al}$　同様に，$PE=\dfrac{abc-4(s-a)(s-b)(s-c)}{bm}$，$PF=\dfrac{abc-4(s-a)(s-b)(s-c)}{cn}$

$abc-4(s-a)(s-b)(s-c)$は定数であるから，$abc-4(s-a)(s-b)(s-c)=k$ とおくと，

$PD=\dfrac{k}{al}$，$PE=\dfrac{k}{bm}$，$PF=\dfrac{k}{cn}$ と表される。

ところで，①より，$\dfrac{AP}{PL}=\dfrac{a}{s-a}$ であるから，△PBC＝$\dfrac{s-a}{s}S$

従って，△PEF＝$\dfrac{PE^2}{PC^2}$△PCB＝$\dfrac{\left(\frac{k}{bm}\right)^2}{\left(\frac{c}{s}n\right)^2}\times\dfrac{s-a}{s}S=\dfrac{s(s-a)k^2}{b^2c^2m^2n^2}S$

同様に，△PFD＝$\dfrac{s(s-b)k^2}{c^2a^2n^2l^2}S$，△PDE＝$\dfrac{s(s-c)k^2}{a^2b^2l^2m^2}S$

△DEF＝$\dfrac{k^2s(s-a)S}{b^2c^2m^2n^2}+\dfrac{k^2s(s-b)S}{c^2a^2n^2l^2}+\dfrac{k^2s(s-c)S}{a^2b^2l^2m^2}=\dfrac{k^2s\{a^2(s-a)l^2+b^2(s-b)m^2+c^2(s-c)n^2\}S}{abc\cdot al^2\cdot bm^2\cdot cn^2}$

（分子の中括弧の中）$a^2(s-a)l^2+b^2(s-b)m^2+c^2(s-c)n^2$

$$=a^2(s-a)\times\frac{s\{a(s-a)+(b-c)^2\}}{a}+b^2(s-b)\times\frac{s\{b(s-b)+(c-a)^2\}}{b}+c^2(s-c)\times\frac{s\{c(s-c)+(a-b)^2\}}{c}$$

$$=s\left[a(s-a)\{a(s-a)+(b-c)^2\}+b(s-b)\{b(s-b)+(c-a)^2\}+c(s-c)\{c(s-c)+(a-b)^2\}\right]$$

$$=s\times\frac{s}{2}\left[a^3+b^3+c^3-\sum a^2b+4abc\right]=\frac{s^2}{2}\left[2abc-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\right]$$

$$=\frac{s^2}{2}\left[2abc-2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)\right]=s^2\left[abc-4(s-a)(s-b)(s-c)\right]=ks^2$$

$$\triangle\text{DEF}=\frac{k^2s\cdot ks^2\cdot S}{abc\cdot s\{a(s-a)+(b-c)^2\}\cdot s\{b(s-b)+(c-a)^2\}\cdot s\{c(s-c)+(a-b)^2\}}$$

$$=\frac{k^3S}{abc\{a(s-a)+(b-c)^2\}\{b(s-b)+(c-a)^2\}\{c(s-c)+(a-b)^2\}}=\frac{\{abc-4(s-a)(s-b)(s-c)\}^3S}{abc\{a(s-a)+(b-c)^2\}\{b(s-b)+(c-a)^2\}\{c(s-c)+(a-b)^2\}}$$

よって，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{\{abc-4(s-a)(s-b)(s-c)\}^3}{abc\{a(s-a)+(b-c)^2\}\{b(s-b)+(c-a)^2\}\{c(s-c)+(a-b)^2\}}\cdots$（答）

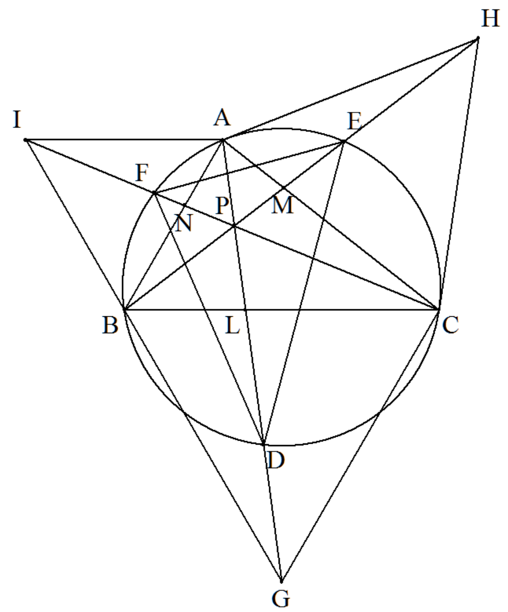
（補足）$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\times\dfrac{a}{2R}=\dfrac{abc}{4R}$ より　$abc=4RS$（R は△ABC の外接円の半径），

また，ヘロンの公式から，$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ より $(s-a)(s-b)(s-c)=\dfrac{S^2}{s}=rS$（$r$ は△ABC の内接円の半径）

であるから， $k=abc-4(s-a)(s-b)(s-c)=4RS-4rS=4(R-r)S$ と表すこともできる。

$$\left(\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{\{4(R-r)S\}^3}{abc\{a(s-a)+(b-c)^2\}\{b(s-b)+(c-a)^2\}\{c(s-c)+(a-b)^2\}}\right.$$
$$\left.=\frac{16(R-r)^3S^2}{R\{a(s-a)+(b-c)^2\}\{b(s-b)+(c-a)^2\}\{c(s-c)+(a-b)^2\}}\right)$$

(7) 点 P がフェルマー点のとき



△ABC の外側に正三角形 GBC，HCA，IAB を作る。

このとき，AG，BH，CI は 1 点 P で交わり，P の周りの 6 個の角はすべて 60° となる。(証明省略)

AP＝x，BP＝y，CP＝z とおく。($x>0, y>0, z>0$)

△PBC＋△PCA＋△PAB＝△ABC＝S であるから

$\frac{1}{2}(yz+zx+xy)\sin 120°=S$　　$\frac{1}{2}(yz+zx+xy)\frac{\sqrt{3}}{2}=S$

$\therefore\ yz+zx+xy=\frac{4}{\sqrt{3}}S$ …①

△PBC に余弦定理を適用すると

$y^2+z^2-2yz\cos 120°=a^2, y^2+z^2-2yz\left(-\frac{1}{2}\right)=a^2$　　$y^2+yz+z^2=a^2$ …②

同様に，△PCA，△PAB にも余弦定理を適用して　$z^2+zx+x^2=b^2$ …③, $x^2+xy+y^2=c^2$ …④

②＋③＋④より　$2(x^2+y^2+z^2)+yx+zx+xy=a^2+b^2+c^2$

$2(x+y+z)^2=a^2+b^2+c^2+3(yx+zx+xy)$

これに①を代入して　$x+y+z=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}{2}}=k$ …⑤とおく。

②－③より　$(x+y+z)(y-x)=a^2-b^2$

これに⑤を代入すると　$k(y-x)=a^2-b^2$，$y=x+\frac{a^2-b^2}{k}$

これを④に代入すると　$x^2+x\left(x+\frac{a^2-b^2}{k}\right)+\left(x+\frac{a^2-b^2}{k}\right)^2=c^2$

両辺に k^2 をかけて整理すると　$3k^2x^2+3(a^2-b^2)kx+(a^2-b^2)^2-c^2k^2=0$

$$kx=\frac{-3(a^2-b^2)\pm\sqrt{\{3(a^2-b^2)\}^2-4\cdot 3\{(a^2-b^2)^2-c^2k^2\}}}{6}=\frac{-3(a^2-b^2)\pm\sqrt{12c^2k^2-3(a^2-b^2)^2}}{6}$$

$x>0$ より

$$x=\frac{-3(a^2-b^2)+\sqrt{12c^2k^2-3(a^2-b^2)^2}}{6k}=\frac{-3(a^2-b^2)+\sqrt{3\left\{4c^2\times\frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}{2}-(a^2-b^2)^2\right\}}}{6k}$$

(根号内) $=3(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4+8\sqrt{3}S+3c^4)=3\left\{(4S)^2+2(4S)(\sqrt{3}c^2)+(\sqrt{3}c^2)^2\right\}=3(4S+3c^2)^2$

$$x=\frac{-3(a^2-b^2)+\sqrt{3}(4S+3c^2)}{6k}=\frac{-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}$$

同様に，$y=\frac{a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}$，$z=\frac{a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}$

次に，PL＝x'，PM＝y'，PN＝z' とおく。

△PBL＋△PLC＝△PBC であるから　$\frac{1}{2}x'y\sin 60° + \frac{1}{2}x'z\sin 60° = \frac{1}{2}yz\sin 120°$　$\therefore\ x' = \frac{yz}{y+z}$

AL＝ $x + x' = x + \frac{yz}{y+z} = \frac{yz+zx+xy}{y+z}$

$\frac{BL}{LC} = \frac{\triangle PBL}{\triangle PLC} = \frac{\frac{1}{2}x'y\sin 60°}{\frac{1}{2}x'z\sin 60°} = \frac{y}{z}$ より　BL＝ $\frac{y}{y+z}a$，LC= $\frac{z}{y+z}a$

方べきの定理より　AL・LD＝BL・LC

LD＝ $BL\cdot LC\cdot\frac{1}{AL} = \frac{y}{y+z}a\cdot\frac{z}{y+z}a\cdot\frac{y+z}{yz+zx+xy} = \frac{a^2yz}{(y+z)(yz+zx+xy)}$

PD＝PL＋LD＝ $\frac{yz}{y+z} + \frac{a^2yz}{(y+z)(yz+zx+xy)} = \frac{yz(yz+zx+xy+a^2)}{(y+z)(yz+zx+xy)} = \frac{yz(yz+zx+xy+y^2+yz+z^2)}{(y+z)(yz+zx+xy)} = \frac{yz(y+z)(x+y+z)}{(y+z)(yz+zx+xy)}$

$$= \frac{yz(x+y+z)}{yz+zx+xy}$$

同様に　PE＝ $\frac{zx(x+y+z)}{yz+zx+xy}$，PF＝ $\frac{xy(x+y+z)}{yz+zx+xy}$

△DEF=△PEF＋△PFD＋△PDE＝ $\frac{1}{2}(PE\cdot PF + PF\cdot PD + PD\cdot PE)\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{4}(PE\cdot PF + PF\cdot PD + PD\cdot PE)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\frac{zx(x+y+z)}{yz+zx+xy}\cdot\frac{xy(x+y+z)}{yz+zx+xy} + \frac{xy(x+y+z)}{yz+zx+xy}\cdot\frac{yz(x+y+z)}{yz+zx+xy} + \frac{yz(x+y+z)}{yz+zx+xy}\cdot\frac{zx(x+y+z)}{yz+zx+xy}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{xyz(x+y+z)^3}{(yz+zx+xy)^2}\cdots⑤$$

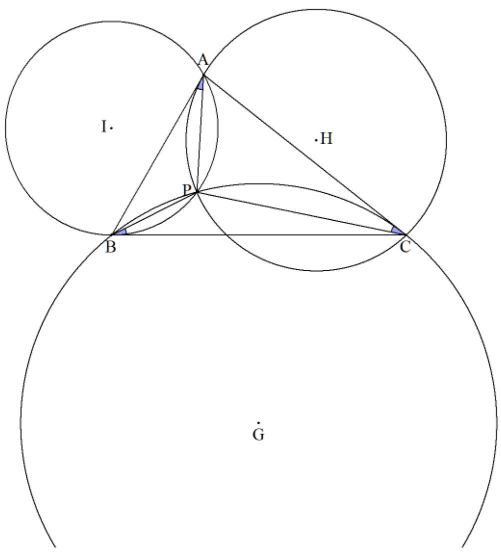
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\left(\frac{-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}\right)\left(\frac{a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}\right)\left(\frac{a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}\right)k^3}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)^2}$$

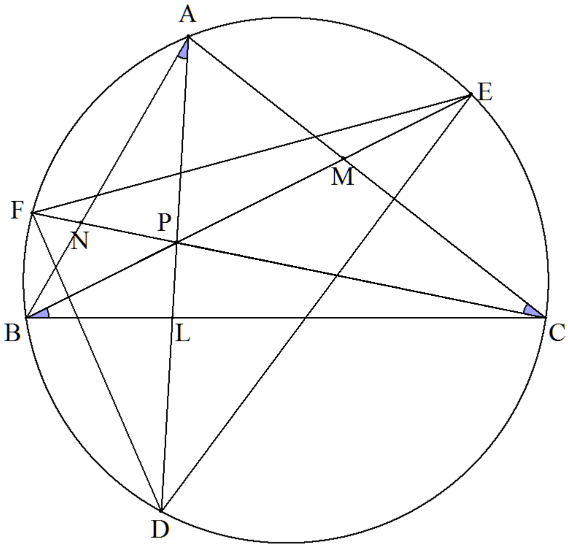
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{8S}\right)^3\left(-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)S$$

よって　$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{8S}\right)^3\left(-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\cdots$（答）

（補足）⑤式より，$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{xyz(x+y+z)^3}{(yz+zx+xy)^2}\cdot\frac{1}{S} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{xyz(x+y+z)^3}{(yz+zx+xy)^2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}(yz+zx+xy)} = xyz\left(\frac{x+y+z}{yz+zx+xy}\right)^3$ と表すこともできる。

(8) 点Pが第1ブロカール点のとき





左側の図において，点Bを通りCAの点Cで接する円Gと，点Cを通りABの点Aで接する円Hと，点Aを通りBCの点Bで接する円Iは，1点Pで交わる。この点を第1ブロカール点という。このとき，∠PAB＝∠PBC＝∠PCAとなる（証明は接弦定理とその逆を用いる)。なお，∠PAC＝∠PBA＝∠PCBとなる点を第2ブロカール点という。

いま，∠PAB＝∠PBC＝∠PCA＝ωとおく。

△DEFと△ABCにおいて，∠D=∠FDA＋∠ADE＝ω＋∠ABE＝∠B

同様に，∠E=∠DEB＋∠BEF＝ω＋∠BCF=∠C

よって，△DEF∽△ABC

また，ともに同じ円に内接しているから，△DEF≡△ABC

よって，$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=1\cdots$（答）

（別解）

AP＝x，BP＝y，CP＝zとおく。（$x>0, y>0, z>0$）また，∠PAB＝∠PBC＝∠PCA＝ωとおく。

△PBC＝$\dfrac{1}{2}ay\sin\omega=\dfrac{1}{2}ay\cos\omega\tan\omega=\dfrac{a^2+y^2-z^2}{4}\tan\omega$

同様に　△PCA＝$\dfrac{b^2+z^2-x^2}{4}\tan\omega$，△PAB＝$\dfrac{c^2+x^2-y^2}{4}\tan\omega$

△PBC＋△PCA＋△PAB＝S

$$\frac{a^2+y^2-z^2}{4}\tan\omega+\frac{b^2+z^2-x^2}{4}\tan\omega+\frac{c^2+x^2-y^2}{4}\tan\omega=S$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4}\tan\omega=S \quad \therefore \tan\omega=\frac{4S}{a^2+b^2+c^2}\cdots①$$

点Pの周りの角について，∠APF＝∠CPD=A，∠BPD＝∠APE＝B，∠CPE＝∠BPF＝C

△PBCに正弦定理を適用　$\dfrac{z}{\sin\omega}=\dfrac{y}{\sin(C-\omega)}$

$$\frac{y}{z}=\frac{\sin(C-\omega)}{\sin\omega}=\frac{\sin C\cos\omega-\cos C\sin\omega}{\sin\omega}=\frac{\sin C}{\tan\omega}-\cos C=\frac{2S}{ab}\times\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2c^2}{2ab}=\frac{c^2}{ab}$$

$\therefore \dfrac{y}{z}=\dfrac{c^2}{ab}\cdots$② 同様に $\dfrac{z}{x}=\dfrac{a^2}{bc}\cdots$③, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{b^2}{ca}\cdots$④

S ＝△PBC＋△PCA＋△PAB より

$$S=\frac{1}{2}yz\sin(A+B)+\frac{1}{2}zx\sin(B+C)+\frac{1}{2}xy\sin(C+A)=\frac{1}{2}yz\sin C+\frac{1}{2}zx\sin A+\frac{1}{2}xy\sin B=\frac{1}{2}yz\cdot\frac{2S}{ab}+\frac{1}{2}zx\cdot\frac{2S}{bc}+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{2S}{ca}$$

$$=\frac{cyz+azx+bxy}{abc}S$$

$\therefore$ $cyz+azx+bxy=abc\cdots$⑤

④より $y=\dfrac{ca}{b^2}x$, ③より $z=\dfrac{a^2}{bc}x$

これらを⑤に代入すると $c\cdot\dfrac{ca}{b^2}x\cdot\dfrac{a^2}{bc}x+a\cdot\dfrac{a^2}{bc}x\cdot x+bx\cdot\dfrac{ca}{b^2}x=abc$ $x^2\left(c^2a^2+a^2b^2+b^2c^2\right)=b^4c^2$

$x>0$ より $x=\dfrac{b^2c}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$ 同様に $y=\dfrac{c^2a}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$, $z=\dfrac{a^2b}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$

次に，PL＝x'，PM＝y'，PN＝z' とおく。（$x'>0, y'>0, z'>0$）

△PBC＝△PBL＋△PLC より $\dfrac{1}{2}yz\sin(A+B)=\dfrac{1}{2}x'y\sin B+\dfrac{1}{2}x'z\sin A$

$\sin(A+B)=\sin C$ であるから $cyz=x'(by+az)$

$$\therefore x'=\frac{cyz}{by+az}=\frac{c\cdot\dfrac{c^2a}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}\cdot\dfrac{a^2b}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}}{b\cdot\dfrac{c^2a}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}+a\cdot\dfrac{a^2b}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}}=\frac{c^3a^2}{\left(c^2+a^2\right)\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

$$\text{AL}=x+x'=\frac{b^2c}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}+\frac{c^3a^2}{\left(c^2+a^2\right)\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}=\frac{b^2c\left(c^2+a^2\right)+c^3a^2}{\left(c^2+a^2\right)\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

$$=\frac{c\left(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\right)}{\left(c^2+a^2\right)\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}=\frac{c\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}{c^2+a^2}$$

また，$\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{\triangle PBL}{\triangle PLC}=\dfrac{\frac{1}{2}x'y\sin B}{\frac{1}{2}x'z\sin A}=\dfrac{by}{az}=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c^2}{ab}=\dfrac{c^2}{a^2}$ より BL＝$\dfrac{c^2a}{c^2+a^2}$，LC=$\dfrac{a^2a}{c^2+a^2}=\dfrac{a^3}{c^2+a^2}$

方べきの定理より AL・LD＝BL・LC

$$\text{LD}=BL\cdot LC\cdot\frac{1}{AL}=\frac{c^2a}{c^2+a^2}\cdot\frac{a^3}{c^2+a^2}\cdot\frac{c^2+a^2}{c\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}=\frac{ca^4}{\left(c^2+a^2\right)\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

$$\text{PD}=\text{PL}+\text{LD}=\frac{c^3a^2}{\left(c^2+a^2\right)\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}+\frac{ca^4}{\left(c^2+a^2\right)\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}=\frac{ca^2}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$$

同様に PE＝$\dfrac{ab^2}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$，PF＝$\dfrac{bc^2}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$

$$\triangle\text{PEF}=\frac{1}{2}PE\cdot PF\sin(A+B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{ab^2}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}\cdot\frac{bc^2}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}\cdot\frac{2S}{ab}=\frac{b^2c^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}S$$

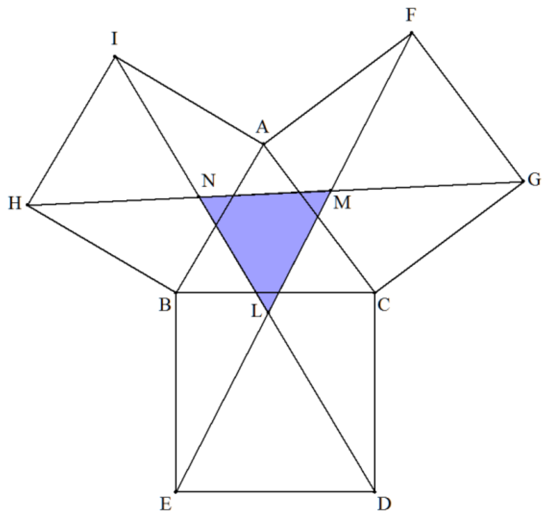
同様に　△PFD＝$\dfrac{c^2a^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}S$，△PDE＝$\dfrac{a^2b^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}S$

よって　△DEF＝△PEF＋△PFD＋△PDE＝$\dfrac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}S=S$ であるから

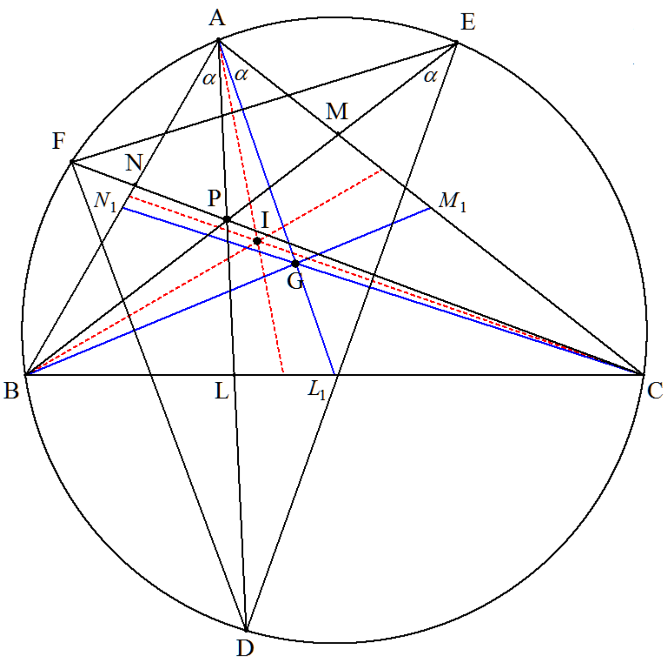
$\therefore \dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=1\cdots$（答）

（補足）△ABC の外側に正方形 BCDE，CAFG，ABHI をつくり，
3 直線 FE，ID，HG で囲まれた三角形を LMN とする。
∠PAB＝∠PBC＝∠PCA＝ω を Brocard 角という。

この角を用いると，$\dfrac{\triangle LMN}{\triangle ABC}=\dfrac{2}{\cot\omega+2}$ と表すことができる。



(9) 点 P がルモワーヌ点のとき



図のように，3 つの中線を

$AL_1 = l$，$BM_1 = m$，$CN_1 = n$ とおく。

また，$\angle CAL_1 = \angle BAL = \angle BED = \alpha$ とおく。

中線定理より　$2\left\{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + l^2\right\} = b^2 + c^2$

$\therefore 4l^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$

同様に　$4m^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2$，　$4n^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$

また，　$BL = x_1$，$AL = y_1 l$ とおく。

△ABL に正弦定理を適用すると　$\dfrac{x_1}{\sin\alpha} = \dfrac{y_1 l}{\sin B}$ …①

△ACL₁ に正弦定理を適用すると　$\dfrac{\frac{a}{2}}{\sin\alpha} = \dfrac{l}{\sin C}$ …②

①÷②を辺々計算すると　$\dfrac{2x_1}{a} = \dfrac{\sin C}{\sin B} y_1 = \dfrac{c}{b} y_1$　$\therefore y_1 = \dfrac{2b}{ca} x_1$ …③

△ABL に余弦定理を適用すると　$(ly_1)^2 = c^2 + x_1{}^2 - 2cx_1 \cos B$

③を代入して　$\left(\dfrac{2bl}{ca} x_1\right)^2 = c^2 + x_1{}^2 - 2cx_1 \cdot \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

両辺に c^2a^2 をかけて，移項すると　$(4b^2l^2 - c^2a^2)x_1{}^2 + c^2a(c^2 + a^2 - b^2)x_1 - c^4a^2 = 0$ …④

（$x_1{}^2$ の係数）$b^2(2b^2 + 2c^2 - a^2) - c^2a^2 = 2b^2(b^2 + c^2) - a^2(b^2 + c^2) = (b^2 + c^2)(2b^2 - a^2)$ であるから

$$\begin{array}{lll} (b^2+c^2) & \times & -c^2a \to c^2a(-2b^2+a^2) \\ (2b^2-a^2) & & c^2a \to c^2a(b^2+c^2) \\ \hline & & c^2a(c^2+a^2-b^2) \end{array}$$

たすきがけで④を因数分解すると　$\{(b^2 + c^2)x_1 - c^2a\}\{(2b^2 - a^2)x_1 + c^2a\} = 0$

題意に適するのは　$x_1 = \dfrac{c^2a}{b^2 + c^2} = BL$

このとき，$LC = a - \dfrac{c^2a}{b^2 + c^2} = \dfrac{b^2a}{b^2 + c^2}$

また，③より，$y_1 = \dfrac{2b}{ca} \times \dfrac{c^2a}{b^2 + c^2} = \dfrac{2bc}{b^2 + c^2}$　$\therefore AL = \dfrac{2bc}{b^2 + c^2} l$

同様に　$CM = \dfrac{a^2b}{c^2 + a^2}$，$MA = \dfrac{c^2b}{c^2 + a^2}$，$BM = \dfrac{2ca}{c^2 + a^2} m$ ；$AN = \dfrac{b^2c}{a^2 + b^2}$，$NB = \dfrac{a^2c}{a^2 + b^2}$，$CN = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2} n$

次に，メネラウスの定理より　$\dfrac{AP}{PL} \cdot \dfrac{LB}{BC} \cdot \dfrac{CM}{MA} = 1$

$$\frac{Ap}{PL} = \frac{BC}{LB} \cdot \frac{MA}{CM} = \frac{a \times \dfrac{c^2b}{c^2 + a^2}}{\dfrac{c^2a}{b^2 + c^2} \times \dfrac{a^2b}{c^2 + a^2}} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \cdots ⑤$$

AP＝$\dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}\times AL=\dfrac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}\times\dfrac{2bc}{b^2+c^2}l=\dfrac{2bc}{a^2+b^2+c^2}l$

PL＝$\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\times AL=\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}\times\dfrac{2bc}{b^2+c^2}l=\dfrac{2a^2bc}{(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}l$

同様に　BP＝$\dfrac{2ca}{a^2+b^2+c^2}m$，PM=$\dfrac{2ab^2c}{(c^2+a^2)(a^2+b^2+c^2)}m$；CP＝$\dfrac{2ab}{a^2+b^2+c^2}n$，PN=$\dfrac{2abc^2}{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}n$

また，方べきの定理より　AL・LD＝BL・LC

LD＝$BL\cdot LC\times\dfrac{1}{AL}=\dfrac{c^2a}{b^2+c^2}\cdot\dfrac{b^2a}{b^2+c^2}\cdot\dfrac{b^2+c^2}{2bcl}=\dfrac{a^2bc}{2(b^2+c^2)l}$

PD＝PL+LD＝$\dfrac{2a^2bc}{(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)}l+\dfrac{a^2bc}{2(b^2+c^2)l}=\dfrac{a^2bc(4l^2+a^2+b^2+c^2)}{2(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)l}=\dfrac{a^2bc(2b^2+2c^2-a^2+a^2+b^2+c^2)}{2(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)l}$

$=\dfrac{a^2bc\times3(b^2+c^2)}{2(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)l}=\dfrac{3a^2bc}{2(a^2+b^2+c^2)l}=\dfrac{a}{l}k\ \left(k=\dfrac{3abc}{2(a^2+b^2+c^2)l}\right)$とおくと，

同様に　PE＝$\dfrac{b}{m}k$，PF＝$\dfrac{c}{n}k$

⑤より　AL：PL=$(a^2+b^2+c^2):a^2$であるから

∴△PBC＝$\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}S$　同様に　△PCA＝$\dfrac{b^2}{a^2+b^2+c^2}S$，△PAB＝$\dfrac{c^2}{a^2+b^2+c^2}S\cdots$⑥

△PEF∽△PCB であるから，△PEF：△PCB＝PE²：PC² より

△PEF=$\dfrac{PE^2}{PC^2}$△PBC＝$\dfrac{\left(\dfrac{b}{m}k\right)^2}{\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2+c^2}n\right)^2}\times\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}S=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4m^2n^2}k^2S$

$=\dfrac{4(a^2+b^2+c^2)}{(2c^2+2a^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}\left\{\dfrac{3abc}{2(a^2+b^2+c^2)}\right\}^2S=\dfrac{9a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)(2c^2+2a^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}S$

同様に

△PFD＝$\dfrac{9a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)(2a^2+2b^2-c^2)(2b^2+2c^2-a^2)}S$，△PDE＝$\dfrac{9a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)}S$

△DEF＝△PEF＋△PFD＋△PDE$=\dfrac{9a^2b^2c^2\{(2b^2+2c^2-a^2)+(2c^2+2a^2-b^2)+(2a^2+2b^2-c^2)\}}{(a^2+b^2+c^2)(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}S$

$=\dfrac{9a^2b^2c^2\times3(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}S=\dfrac{27a^2b^2c^2}{(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}S$

よって　$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{27a^2b^2c^2}{(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}\cdots$（答）

（補足）P から BC，CA，AB に下した垂線の長さをそれぞれh_1，h_2，h_3とすると，点 P は$h_1{}^2+h_2{}^2+h_3{}^2$を最小にする点である。

（∵）⑥より，△PBC＝$\dfrac{1}{2}ah_1=\dfrac{a^2}{a^2+b^2+c^2}S$　∴$h_1=\dfrac{2a}{a^2+b^2+c^2}S$　同様に，$h_2=\dfrac{2b}{a^2+b^2+c^2}S$，$h_3=\dfrac{2c}{a^2+b^2+c^2}S$

従って　$h_1:h_2:h_3=a:b:c$である。

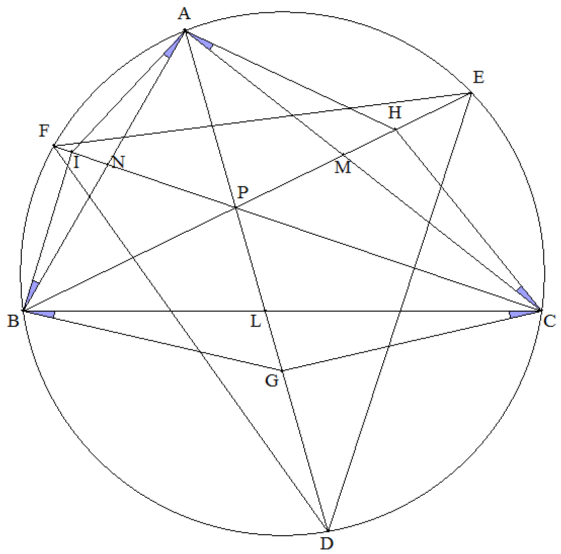
さて，コーシー・シュワルツの不等式より　$(a^2+b^2+c^2)(h_1{}^2+h_2{}^2+h_3{}^2)\geqq(ah_1+bh_2+ch_3)^2=(2S)^2$であるから

$$h_1^2+h_2^2+h_3^2 \geqq \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}$$

この不等式の等号は，$h_1 : h_2 : h_3 = a : b : c$ のときであるから，点 P は $h_1^2+h_2^2+h_3^2$ を最小にする点である。■

(10)　　点 P がキーペルト点のとき

まず，　AG，BH，CI が 1 点 P で交わることを証明する。



△GCB∽△HAC∽△IBA であるから，GB＝GC＝ka とおくと，

HC=HA＝kb，IA=IB＝kc となる。$\left(\text{ただし，} k=\dfrac{1}{2\cos\theta}\right)$

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{\triangle ABG}{\triangle ACG}\cdot\frac{\triangle BCH}{\triangle BAH}\cdot\frac{\triangle CAI}{\triangle CBI}$$
$$=\frac{\triangle ABG}{\triangle CBI}\cdot\frac{\triangle BCH}{\triangle ACG}\cdot\frac{\triangle CAI}{\triangle BAH}=\frac{c\cdot ka}{a\cdot kc}\cdot\frac{a\cdot kb}{b\cdot ka}\cdot\frac{b\cdot kc}{c\cdot kb}=1$$

チェバの定理の逆より，AL，BM，CN は 1 点で交わる。

この点を P とすると，AG，BH，CI は 1 点 P で交わる。■

次に，BL：LC＝△ABG：△ACG

$$=\frac{1}{2}c\cdot ka\sin(B+\theta):\frac{1}{2}b\cdot ka\sin(C+\theta)=c\sin(B+\theta):b\sin(C+\theta)$$

BL＝$\dfrac{c\sin(B+\theta)}{c\sin(B+\theta)+b\sin(C+\theta)}a=\dfrac{c(\sin B\cos\theta+\cos B\sin\theta)}{c(\sin B\cos\theta+\cos B\sin\theta)+b(\sin C\cos\theta+\cos C\sin\theta)}a$

$$=\frac{c(\sin B\cos\theta+\cos B\sin\theta)}{(c\sin B+b\sin C)\cos\theta+(b\cos C+c\cos B)\sin\theta}a=\frac{c\sin B\cos\theta+c\cos B\sin\theta}{2c\sin B\cos\theta+a\sin\theta}a=\frac{c\cdot\dfrac{2S}{ca}\cdot\cos\theta+c\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\sin\theta}{2c\cdot\dfrac{2S}{ca}\cdot\cos\theta+a\sin\theta}a$$

$$=\frac{a\{4S\cos\theta+(c^2+a^2-b^2)\sin\theta\}}{2(4S\cos\theta+a^2\sin\theta)}=\frac{a(4S\cot\theta+c^2+a^2-b^2)}{2(4S\cot\theta+a^2)}=\frac{a(d+c^2+a^2-b^2)}{2(d+a^2)}=\frac{a(a^2-b^2+c^2+d)}{2(a^2+d)}$$

ここで，$-a^2+b^2+c^2+d=d_1$，　$a^2-b^2+c^2+d=d_2$，　$a^2+b^2-c^2+d=d_3$ とおくと，

BL＝$\dfrac{ad_2}{2(a^2+d)}$　同様に，CM=$\dfrac{bd_3}{2(b^2+d)}$，AN=$\dfrac{cd_1}{2(c^2+d)}$

また，LC＝$\dfrac{ad_3}{2(a^2+d)}$，MA=$\dfrac{bd_1}{2(b^2+d)}$，NB=$\dfrac{cd_2}{2(c^2+d)}$　である。

よって　$\dfrac{\triangle LMN}{\triangle ABC}=\dfrac{2BL\cdot CM\cdot AN}{BC\cdot CA\cdot AB}=\dfrac{2\times\dfrac{ad_2}{2(a^2+d)}\times\dfrac{bd_3}{2(b^2+d)}\times\dfrac{cd_1}{2(c^2+d)}}{abc}$

$$=\frac{d_1d_2d_3}{4(a^2+d)(b^2+d)(c^2+d)}=\frac{(-a^2+b^2+c^2+d)(a^2-b^2+c^2+d)(a^2+b^2-c^2+d)}{4(a^2+d)(b^2+d)(c^2+d)}$$

また，AL＝l，BM＝m，CN=n とおく。

∠ALB＋∠ALC＝180°　であるから，$\cos\angle ALB+\cos\angle ALC=0$

余弦定理を適用して　$\dfrac{BL^2+l^2-c^2}{2BL\cdot l}+\dfrac{CL^2+l^2-b^2}{2CL\cdot l}=0$

分母を払って　$CL(BL^2+l^2-c^2)+BL(CL^2+l^2-b^2)=0$

移項して　$(CL+BL)l^2=CL(c^2-BL^2)+BL(b^2-CL^2)$

$$al^2=\frac{a(a^2+b^2-c^2+d)}{2(a^2+d)}\left[c^2-\left\{\frac{a(c^2+a^2-b^2+d)}{2(a^2+d)}\right\}^2\right]+\frac{a(c^2+a^2-b^2+d)}{2(a^2+d)}\left[b^2-\left[\left\{\frac{a(a^2+b^2-c^2+d)}{2(a^2+d)}\right\}^2\right]\right]$$

$$l^2=\frac{(a^2+b^2-c^2+d)\left\{4c^2(a^2+d)^2-a^2(c^2+a^2-b^2+d)^2\right\}+(c^2+a^2-b^2+d)\left\{4b^2(a^2+d)^2-a^2(a^2+b^2-c^2+d)^2\right\}}{8(a^2+d)^3}$$

分子において，$d=-a^2$ を代入すると 0 になるから，a^2+d を因数に持つ。d について変形すると

（分子）

$$=2(a^2+d)\left\{a^2(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4)+2(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4)d+(2b^2+2c^2-a^2)d^2\right\}$$

ここで，$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=16S^2$ であるから

$$l^2=\frac{2(a^2+d)\left\{16a^2S^2+32S^2d+(2b^2+2c^2-a^2)d^2\right\}}{8(a^2+d)^3}=\frac{16a^2S^2+32dS^2+(2b^2+2c^2-a^2)d^2}{4(a^2+d)^2}$$

同様に，$m^2=\dfrac{16b^2S^2+32dS^2+(2c^2+2a^2-b^2)d^2}{4(b^2+d)^2}$，　$n^2=\dfrac{16c^2S^2+32dS^2+(2a^2+2b^2-c^2)d^2}{4(c^2+d)^2}$

次に，メネラウスの定理により　$\dfrac{AP}{PL}\cdot\dfrac{LB}{BC}\cdot\dfrac{CM}{MA}=1$

$$\frac{AP}{PL}=\frac{BC}{LB}\cdot\frac{MA}{CM}=\frac{a\times\dfrac{bd_1}{2(a^2+d)}}{\dfrac{ad_2}{2(a^2+d)}\times\dfrac{bd_3}{2(b^2+d)}}=\frac{2(a^2+d)d_1}{d_2d_3}$$

ここで，$2(a^2+d)d_1+d_2d_3=2(a^2+d)(b^2+c^2-a^2+d)+(c^2+a^2-b^2+d)(a^2+b^2-c^2+d)$

$$=2a^2(b^2+c^2-a^2)+2(b^2+c^2)d+2d^2+a^4-(b^2-c^2)^2+2a^2d+d^2$$
$$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4+2(a^2+b^2+c^2)d+3d^2$$
$$=16S^2+2(a^2+b^2+c^2)d+3d^2$$

これは，a,b,c について対称式であるから

$2(a^2+d)d_1+d_2d_3=2(b^2+d)d_2+d_3d_1=2(c^2+d)d_3+d_1d_2=16S^2+2(a^2+b^2+c^2)d+3d^2=e$ とおくと，

$AP=\dfrac{2(a^2+d)d_1}{e}l$，　$PL=\dfrac{d_2d_3}{e}l$，　△PBC＝$\dfrac{d_2d_3}{e}S$

同様に

$BP=\dfrac{2(b^2+d)d_2}{e}m$，　$PM=\dfrac{d_3d_1}{e}m$，　△PCA＝$\dfrac{d_3d_1}{e}S$　；$CP=\dfrac{2(c^2+d)d_3}{e}n$，　$PN=\dfrac{d_1d_2}{e}n$，　△PBC＝$\dfrac{d_1d_2}{e}S$

次に，方べきの定理により　AL・LD=BL・LC

LD＝$BL\cdot LC\cdot\dfrac{1}{AL}=\dfrac{ad_2}{2(a^2+d)}\cdot\dfrac{ad_3}{2(a^2+d)}\cdot\dfrac{1}{l}=\dfrac{a^2d_2d_3}{4(a^2+d)^2l}$

PD＝PL＋LD＝$\dfrac{d_2d_3}{e}l+\dfrac{a^2d_2d_3}{4(a^2+d)^2l}=\dfrac{d_2d_3\left\{4(a^2+d)^2l^2+a^2e\right\}}{4(a^2+d)^2el}$

分子の中括弧の中　$4(a^2+d)^2l^2+a^2e$

$$=4(a^2+d)^2\times\frac{16a^2S^2+32dS^2+(2b^2+2c^2-a^2)d^2}{4(a^2+d)^2}+a^2\left\{16S^2+2(a^2+b^2+c^2)d+3d^2\right\}$$
$$=16a^2S^2+32dS^2+(2b^2+2c^2-a^2)d^2+16a^2S^2+2a^2(a^2+b^2+c^2)d+3a^2d^2$$

$=32a^2S^2+32dS^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)d^2+2a^2\left(a^2+b^2+c^2\right)d$

$=32S^2\left(a^2+d\right)+2d\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(d+a^2\right)=2\left(a^2+d\right)\left\{16S^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)d\right\}$

$\therefore$PD＝$\dfrac{d_2d_3\times 2\left(a^2+d\right)\left\{16S^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)d\right\}}{4\left(a^2+d\right)^2el}=\dfrac{d_2d_3\left\{16S^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)d\right\}}{2\left(a^2+d\right)el}$

ここで，$\dfrac{16S^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)d}{e}$ は定数であるから，$\dfrac{16S^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)d}{e}=p$ とおくと

PD＝$\dfrac{d_2d_3p}{2\left(a^2+d\right)l}$　同様に，PE＝$\dfrac{d_3d_1p}{2\left(b^2+d\right)m}$，PF= $\dfrac{d_1d_2p}{2\left(c^2+d\right)n}$

△PEF∽△PCB より，△PEF：△PCB＝PE^2 ： PC^2 であるから，

△PEF＝$\dfrac{PE^2}{PC^2}$△PCB＝$\dfrac{\left[\dfrac{d_3d_1p}{2\left(b^2+d\right)m}\right]^2}{\left[\dfrac{2\left(c^2+d\right)d_3}{e}n\right]^2}\times\dfrac{d_2d_3}{e}S=\dfrac{{d_1}^2d_2d_3ep^2}{4\left(b^2+d\right)^2m^2\times 4\left(c^2+d\right)^2n^2}S$

ここで，$d_1d_2d_3ep^2=q$，

$4\left(a^2+d\right)^2l^2=16a^2S^2+32dS^2+\left(2b^2+2c^2-a^2\right)d^2=p_1$，

$4\left(b^2+d\right)^2m^2=16b^2S^2+32dS^2+\left(2c^2+2a^2-b^2\right)d^2=p_2$，

$4\left(c^2+d\right)^2n^2=16c^2S^2+32dS^2+\left(2a^2+2b^2-c^2\right)d^2=p_3$　とおくと

△PEF＝$\dfrac{d_1q}{p_2p_3}S$　同様に，△PFD$=\dfrac{d_2q}{p_3p_1}S$，△PDE$=\dfrac{qd_3}{p_1p_2}S$

よって

△DEF=△PEF＋△PFD＋△PDE$=\dfrac{d_1q}{p_2p_3}S+\dfrac{d_2q}{p_3p_1}S+\dfrac{d_3q}{p_1p_2}S=\dfrac{\left(d_1p_1+d_2p_2+d_3p_3\right)q}{p_1p_2p_3}S$

$\therefore\ \dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\dfrac{\left(d_1p_1+d_2p_2+d_3p_3\right)q}{p_1p_2p_3}$

（分子の括弧の中）$=\left(-a^2+b^2+c^2+d\right)\left\{16a^2S^2+32dS^2+\left(2b^2+2c^2-a^2\right)d^2\right\}$

$+\left(a^2-b^2+c^2+d\right)\left\{16b^2S^2+32dS^2+\left(2c^2+2a^2-b^2\right)d^2\right\}+\left(a^2+b^2-c^2+d\right)\left\{16c^2S^2+32dS^2+\left(2a^2+2b^2-c^2\right)d^2\right\}$

展開して d について整理すると，

$=16\left(-\sum a^4+2\sum b^2c^2\right)S^2+48\left(a^2+b^2+c^2\right)S^2d+\left(5\sum a^4-2\sum b^2c^2+96S^2\right)d^2+3\left(a^2+b^2+c^2\right)d^3$

ここで，$-\sum a^4+2\sum b^2c^2=16S^2$ を代入すると

$16\left(16S^2\right)S^2+48\left(a^2+b^2+c^2\right)S^2d+\left(4\sum a^4-16S^2+96S^2\right)d^2+3\left(a^2+b^2+c^2\right)d^3$

$=256S^4+48\left(a^2+b^2+c^2\right)S^2d+4\left(20S^2+a^4+b^4+c^4\right)d^2+3\left(a^2+b^2+c^2\right)d^3$

また，$q=d_1d_2d_3ep^2=\left(-a^2+b^2+c^2+d\right)\left(a^2-b^2+c^2+d\right)\left(a^2+b^2-c^2+d\right)e\left\{\dfrac{16S^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)d}{e}\right\}^2$

$$=\frac{\left(-a^2+b^2+c^2+d\right)\left(a^2-b^2+c^2+d\right)\left(a^2+b^2-c^2+d\right)\left\{16S^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)d\right\}^2}{e}$$

$$=\frac{\left(-a^2+b^2+c^2+d\right)\left(a^2-b^2+c^2+d\right)\left(a^2+b^2-c^2+d\right)\left\{16S^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)d\right\}^2}{16S^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)d+3d^2}$$ であるから

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{\left(-a^2+b^2+c^2+d\right)\left(a^2-b^2+c^2+d\right)\left(a^2+b^2-c^2+d\right)\left\{16S^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)d\right\}^2}{\left\{16S^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)d+3d^2\right\}\left\{16a^2S^2+32S^2d+\left(2b^2+2c^2-a^2\right)d^2\right\}}$$

$$\times\frac{\left\{256S^4+48\left(a^2+b^2+c^2\right)S^2d+4\left(20S^2+a^4+b^4+c^4\right)d^2+3\left(a^2+b^2+c^2\right)d^3\right\}}{\left\{16b^2S^2+32S^2d+\left(2c^2+2c^2-b^2\right)d^2\right\}\left\{16c^2S^2+32S^2d+\left(2a^2+2b^2-c^2\right)d^2\right\}}$$ …（答）…①

（S ＝△ABC，　$d=4S\cot\theta$）

（補足）$\theta=60°$ のとき，　Kiepert 点は Fermat 点に一致するが，①が

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{8S}\right)^3\left(-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)$$ と変形されるかの確認。

$d=4S\cot 60°=\dfrac{4}{\sqrt{3}}S$ であるから，①の分子，分母の順に括弧ごとに代入して計算すると，

$$\left(-a^2+b^2+c^2+d\right)\left(a^2-b^2+c^2+d\right)\left(a^2+b^2-c^2+d\right)=\left(-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)$$

$$\left\{16S^2+\left(a^2+b^2+c^2\right)d\right\}^2=\frac{16}{3}S^2\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right)^2$$

$$256S^4+48\left(a^2+b^2+c^2\right)S^2d+4\left(20S^2+a^4+b^4+c^4\right)d^2+3\left(a^2+b^2+c^2\right)d^3$$
$$=\frac{32}{3}S^2\times2\left\{a^4+b^4+c^4+4\sqrt{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)S+32S^2\right\}$$

ここで，$\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right)^2=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+8\sqrt{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)S+48S^2$

$$=a^4+b^4+c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2+8\sqrt{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)S+64S^2-16S^2$$
$$=a^4+b^4+c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2+8\sqrt{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)S+64S^2-\left(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4\right)$$
$$=2\left\{a^4+b^4+c^4+4\sqrt{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)S+32S^2\right\}$$ であるから

$$256S^4+48\left(a^2+b^2+c^2\right)S^2d+4\left(20S^2+a^4+b^4+c^4\right)d^2+3\left(a^2+b^2+c^2\right)d^3=\frac{32}{3}S^2\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right)^2$$

$$16S^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)d+3d^2=\frac{8}{\sqrt{3}}S\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right)$$

$$16a^2S^2+32S^2d+\left(2b^2+2c^2-a^2\right)d^2=\frac{32}{3}S^2\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right)$$

$$16b^2S^2+32S^2d+\left(2c^2+2a^2-b^2\right)d^2=\frac{32}{3}S^2\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right)$$

$$16c^2S^2+32S^2d+\left(2a^2+2b^2-c^2\right)d^2=\frac{32}{3}S^2\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right)$$

これらの結果を①に代入すると

$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{\left(-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\times\frac{16}{3}S^2\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right)^2}{\frac{8}{\sqrt{3}}S\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right)\times\frac{32}{3}S^2\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right)}$$

$$\times\frac{\frac{32}{3}S^2\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right)^2}{\frac{32}{3}S^2\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right)\times\frac{32}{3}S^2\left(a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\right)}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{8S}\right)^3\left(-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)$$ （確認完了）

3 $\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値一覧

△ABC 内に点 P をとり，AP，BP，CP を延長し，△ABC の外接円との交点をそれぞれ D，E，F とする。また，AD と BC，BE と CA，CF と AB の交点をそれぞれ L，M，N とする。

点 P	$\dfrac{\triangle DEF}{\triangle ABC}$ の値（a,b,c,s,S を用いて） ただし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}, S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$R$ は△ABC の外接円の半径，r は内接円の半径とする。
(1) 外心	1
(2) 重心	$\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^3}{(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}$
(3) 内心	$\dfrac{R}{2r}=\dfrac{abc}{8(s-a)(s-b)(s-c)}$
(4) 垂心（鋭角三角形の場合）	$8\cos A\cos B\cos C=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2b^2c^2}$
(5) Gergonne(ジェルゴンヌ)点 AL，BM，CN の交点（L，M，N は内接円の接点）	$\dfrac{16(R+r)^3S^2}{R\{as-(b-c)^2\}\{bs-(c-a)^2\}\{cs-(a-b)^2\}}$ $=\dfrac{\{abc+4(s-a)(s-b)(s-c)\}^3}{abc\{as-(b-c)^2\}\{bs-(c-a)^2\}\{cs-(a-b)^2\}}$
(6) Nagel(ナーゲル)点 AL，BM，CN の交点（L，M，N は傍接円の接点）	$\dfrac{16(R-r)^3S^2}{R\{a(s-a)+(b-c)^2\}\{b(s-b)+(c-a)^2\}\{c(s-c)+(a-b)^2\}}$ $=\dfrac{\{abc-4(s-a)(s-b)(s-c)\}^3}{abc\{a(s-a)+(b-c)^2\}\{b(s-b)+(c-a)^2\}\{c(s-c)+(a-b)^2\}}$
(7) Fermat(フェルマー)点（どの角も 120°未満の場合） ∠BPC＝∠CPA＝∠APB	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8S}\right)^3\left(-a^2+b^2+c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2-b^2+c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2+b^2-c^2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}S\right)$ AP＝x，BP=y，CP＝z とおくと，$xyz\left(\dfrac{x+y+z}{yz+zx+xy}\right)^3$
(8) 第 1Brocard(ブロカール)点 ∠PAB＝∠PBC＝∠PCA	1
(9) Lemoine(ルモワーヌ)点（類似重心）	$\dfrac{27a^2b^2c^2}{(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}$
(10) Kiepert(キーペルト)点 二等辺三角形の低角 θ，$d=4S\cot\theta$	$\dfrac{(-a^2+b^2+c^2+d)(a^2-b^2+c^2+d)(a^2+b^2-c^2+d)\{16S^2+(a^2+b^2+c^2)d\}^2}{\{16S^2+2(a^2+b^2+c^2)d+3d^2\}\{16a^2S^2+32S^2d+(2b^2+2c^2-a^2)d^2\}}$ $\times\dfrac{\{256S^4+48(a^2+b^2+c^2)S^2d+4(20S^2+a^4+b^4+c^4)d^2+3(a^2+b^2+c^2)d^3\}}{\{16b^2S^2+32S^2d+(2c^2+2c^2-b^2)d^2\}\{16c^2S^2+32S^2d+(2a^2+2b^2-c^2)d^2\}}$

（例 1）$a=8,b=7,c=5$ のとき，$s=10,S=10\sqrt{3}$ である。(10)は $\theta=30°$ のとき。

(1)1，(2)$\dfrac{24334}{20167}$，(3)$\dfrac{7}{6}$，(4)$\dfrac{22}{49}$，(5)$\dfrac{400000}{397537}$，(6)$\dfrac{256}{273}$，(7)1，(8)1，(9)$\dfrac{2800}{2881}$，(10)$\dfrac{704969}{603260}$

（例 2）$a=5,b=4,c=3$ のとき，$s=6,S=6$ である。(10)は $\theta=45°$ のとき。

(1)1，(2)$\dfrac{1250}{949}$，(3)$\dfrac{5}{4}$，(4)0，(5)$\dfrac{12348}{12325}$，(6)$\dfrac{27}{25}$，(7)$\dfrac{48+25\sqrt{3}}{96}$，(8)1，(9)$\dfrac{972}{949}$，(10)$\dfrac{50653}{45240}$

4　（参考）$\dfrac{\triangle LMN}{\triangle ABC}$ の値一覧

$BL=a_1, CM=b_1, AN=c_1$ として，$\dfrac{\triangle LMN}{\triangle ABC}=\dfrac{2a_1b_1c_1}{abc}$ （*）となる公式を用いると簡単。

点 P	$\dfrac{\triangle LMN}{\triangle ABC}$ の値（a,b,c,s,S を用いて） ただし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}, S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，$R$ は△ABC の外接円の半径，r は内接円の半径とする。
(1) 外心	$\dfrac{2a^2b^2c^2(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{\{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2\}\{b^2(c^2+a^2)-(c^2-a^2)^2\}\{c^2(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2\}}$
(2) 重心	$\dfrac{1}{4}$
(3) 内心	$\dfrac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}$
(4) 垂心（鋭角三角形の場合）	$2\cos A\cos B\cos C=\dfrac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{4a^2b^2c^2}$
(5) Gergonne(ジェルゴンヌ)点 AL，BM，CN の交点（L，M，N は内接円の接点）	$\dfrac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}=\dfrac{r}{2R}$
(6) Nagel(ナーゲル)点 AL，BM，CN の交点（L，M，N は傍接円の接点）	$\dfrac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}=\dfrac{r}{2R}$
(7) Fermat(フェルマー)点（どの角も 120° 未満の場合） ∠BPC＝∠CPA＝∠APB	$\dfrac{\left(-a^2+b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2-b^2+c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)}{4\left(a^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(b^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)\left(c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S\right)}$ AP＝x，BP=y，CP＝z とおくと，$\dfrac{2xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)}$
(8) 第 1Brocard(ブロカール)点 ∠PAB＝∠PBC＝∠PCA	$\dfrac{2a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}$
(9) Lemoine(ルモワーヌ)点（類似重心）	$\dfrac{2a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2)}$
(10) Kiepert(キーペルト)点 二等辺三角形の低角 θ，$d=4S\cot\theta$	$\dfrac{(-a^2+b^2+c^2+d)(a^2-b^2+c^2+d)(a^2+b^2-c^2+d)}{4(a^2+d)(b^2+d)(c^2+d)}$

この結果から，$\dfrac{\triangle LMN}{\triangle ABC}$ の値は，Gergonne 点と Nagel 点の場合，および，Brocard 点と Lemoine 点の場合で等しくなることが分かる。

（例 1）$a=8, b=7, c=5$ のとき，$s=10, S=10\sqrt{3}$ である。(10)は $\theta=30°$ のとき。

(1) $\dfrac{2156}{11999}$，(2) $\dfrac{1}{4}$，(3) $\dfrac{28}{117}$，(4) $\dfrac{11}{98}$，(5) $\dfrac{3}{14}$，(6) $\dfrac{3}{14}$，(7) $\dfrac{1600}{15041}$，(8) $\dfrac{78400}{372109}$，(9) $\dfrac{78400}{372109}$，(10) $\dfrac{160}{667}$

（例 2）$a=5, b=4, c=3$ のとき，$s=6, S=6$ である。(10)は $\theta=45°$ のとき。

(1) 0，(2) $\dfrac{1}{4}$，(3) $\dfrac{5}{21}$，(4) 0，(5) $\dfrac{1}{5}$，(6) $\dfrac{1}{5}$，(7) $\dfrac{9756-4750\sqrt{3}}{16021}$，(8) $\dfrac{144}{697}$，(9) $\dfrac{144}{697}$，(10) $\dfrac{24}{55}$

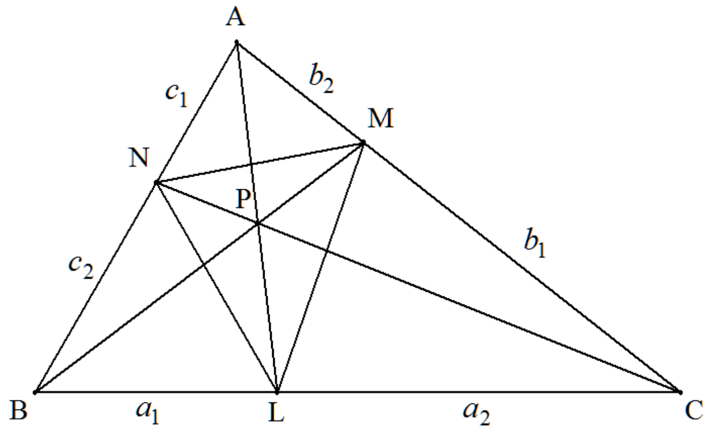
（*）証明

BL＝a_1，LC＝a_2，CM＝b_1，MA＝b_2，AN＝c_1，NB＝c_2とおく。

ただし，$a_1+a_2=a$，$b_1+b_2=b$，$c_1+c_2=c$である。

チェバの定理より　$\dfrac{BL}{LC}\cdot\dfrac{CM}{MA}\cdot\dfrac{AN}{NB}=1$，$\dfrac{a_1}{a_2}\cdot\dfrac{b_1}{b_2}\cdot\dfrac{c_1}{c_2}=1$

$\therefore a_2b_2c_2=a_1b_1c_1$　…①



△LMN＝△ABC－（△AMN＋△BNL＋△CLM）

$$=S-\left(\frac{1}{2}b_2c_1\sin A+\frac{1}{2}c_2a_1\sin B+\frac{1}{2}a_2b_1\sin C\right)$$

$$=S-\left(\frac{1}{2}b_2c_1\times\frac{2S}{bc}+\frac{1}{2}c_2a_1\times\frac{2S}{ca}+\frac{1}{2}a_2b_1\times\frac{2S}{ab}\right)$$

$$=\frac{abc-(ab_2c_1+a_1bc_2+a_2b_1c)}{abc}S$$

$$=\frac{(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)-\{(a_1+a_2)b_2c_1+a_1(b_1+b_2)c_2+a_2b_1(c_1+c_2)\}}{abc}S=\frac{a_1b_1c_1+a_2b_2c_2}{abc}S$$

$$=\frac{2a_1b_1c_1}{abc}S\quad(\because ①より)$$

よって　$\dfrac{\triangle LMN}{\triangle ABC}=\dfrac{2a_1b_1c_1}{abc}$　■

（2018/2/9　時岡）