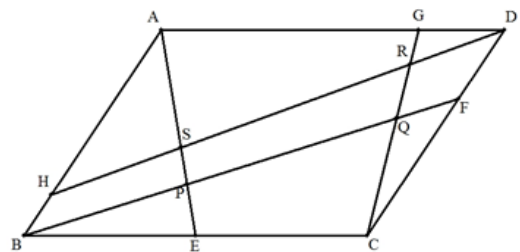


面積が s である $\square ABCD$ において、 $BE = a BC$ ($0 < a < 1$)、 $CF = b CD$ ($0 < b < 1$)、 $DG = c DA$ ($0 < c < 1$)、 $AH = d AB$ ($0 < d < 1$)、 AE と BF の交点を P 、 BF と CG の交点を Q 、 CG と DH の交点を R 、 DH と AE の交点を S とするとき、

- (1) $\triangle BEP$ の面積を求めよ。
- (2) 四角形 $BPSH$ の面積を求めよ。
- (3) 四角形 $PQRS$ の面積を求めよ。



(解) (1) $\triangle BEP = \triangle ABE - \triangle ABP$ である。

まず、 $\triangle ABP$ の面積から考える。

右の図で、 BF と AD の交点を T とおく。

$\triangle BCF \sim \triangle TDF$ であるから

$$BC : TD = b : (1 - b) \text{ より } TD = \frac{1 - b}{b} BC$$

$$AT = AD + DT = BC + \frac{1 - b}{b} BC = \frac{1}{b} BC$$

$\triangle BEP \sim \triangle TAP$ であるから

$$EP : AP = BE : TA = a BC : \frac{1}{b} BC = ab : 1$$

$$\triangle ABP = \frac{1}{ab + 1} \times \triangle ABE = \frac{1}{ab + 1} \times a \triangle ABC = \frac{a}{ab + 1} \times \frac{1}{2} s = \frac{a}{2(ab + 1)} s$$

$$\text{よって } \triangle BEP = \triangle ABE - \triangle ABP = \frac{a}{2} s - \frac{a}{2(ab + 1)} s = \frac{a^2 b}{2(ab + 1)} s \cdots (\text{答})$$

$$(2) (1) \text{と同様に、} \triangle AHS = \frac{d^2 a}{2(da + 1)} s \text{ であるから}$$

$$\text{四角形 } BPSH = \triangle ABP - \triangle AHS = \frac{a}{2(ab + 1)} s - \frac{d^2 a}{2(da + 1)} s = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{ab + 1} - \frac{d^2}{da + 1} \right) s \cdots (\text{答})$$

$$(3) (1) \text{と同様に、} \triangle BCQ = \frac{b}{2(bc + 1)} s, \triangle CDR = \frac{c}{2(cd + 1)} s, \triangle DAS = \frac{d}{2(da + 1)} s \text{ であるから}$$

$$\text{四角形 } PQRS = s - (\triangle ABP + \triangle BCQ + \triangle CDR + \triangle DAS) = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{ab + 1} + \frac{b}{bc + 1} + \frac{c}{cd + 1} + \frac{d}{da + 1} \right) \right\} s \cdots (\text{答})$$

$$\text{【補足】 四角形 } PQRS = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{ab + 1} + \frac{b}{bc + 1} + \frac{c}{cd + 1} + \frac{d}{da + 1} \right) \right\} s$$

$\triangle ABP = \frac{a}{2(ab + 1)} s$	$\triangle BCQ = \frac{b}{2(bc + 1)} s$	$\triangle CDR = \frac{c}{2(cd + 1)} s$	$\triangle DAS = \frac{d}{2(da + 1)} s$
$\triangle AHS = \frac{d^2 a}{2(da + 1)} s$	$\triangle BEP = \frac{a^2 b}{2(ab + 1)} s$	$\triangle CFQ = \frac{b^2 c}{2(bc + 1)} s$	$\triangle DGR = \frac{c^2 d}{2(cd + 1)} s$
四角形 $BPSH$ $= \frac{a}{2} \left(\frac{1}{ab + 1} - \frac{d^2}{da + 1} \right) s$	四角形 $CQPE$ $= \frac{b}{2} \left(\frac{1}{bc + 1} - \frac{a^2}{ab + 1} \right) s$	四角形 $DRQF$ $= \frac{c}{2} \left(\frac{1}{cd + 1} - \frac{b^2}{bc + 1} \right) s$	四角形 $ASRG$ $= \frac{d}{2} \left(\frac{1}{da + 1} - \frac{c^2}{cd + 1} \right) s$

【具体例】

(1) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{5}$ のとき, 四角形 PQRS = $\frac{181}{429}s$

$\triangle ABP = \frac{3}{14}s$	$\triangle BCQ = \frac{2}{13}s$	$\triangle CDR = \frac{5}{42}s$	$\triangle DAS = \frac{1}{11}s$
$\triangle AHS = \frac{1}{110}s$	$\triangle BEP = \frac{1}{28}s$	$\triangle CFQ = \frac{1}{78}s$	$\triangle DGR = \frac{1}{168}s$
四角形 BPSH = $\frac{79}{385}s$	四角形 CQPE = $\frac{43}{364}s$	四角形 DRQF = $\frac{29}{273}s$	四角形 ASRG = $\frac{181}{429}s$

(2) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{1}{4}, d = \frac{4}{5}$ のとき, 四角形 PQRS = $\frac{23}{168}s$

$\triangle ABP = \frac{3}{16}s$	$\triangle BCQ = \frac{2}{7}s$	$\triangle CDR = \frac{5}{48}s$	$\triangle DAS = \frac{2}{7}s$
$\triangle AHS = \frac{4}{35}s$	$\triangle BEP = \frac{1}{16}s$	$\triangle CFQ = \frac{1}{21}s$	$\triangle DGR = \frac{1}{48}s$
四角形 BPSH = $\frac{41}{560}s$	四角形 CQPE = $\frac{25}{112}s$	四角形 DRQF = $\frac{19}{336}s$	四角形 ASRG = $\frac{89}{336}s$

以下, $\triangle ABP = x_1, \triangle BCQ = x_2, \triangle CDR = x_3, \triangle DAS = x_4, \triangle AHS = y_1, \triangle BEP = y_2, \triangle CFQ = y_3, \triangle DGR$

$= y_4$, 四角形 BPSH = $z_1 = x_1 - y_1$, 四角形 CQPE = $z_2 = x_2 - y_2$, 四角形 DRQF = $z_3 = x_3 - y_3$, 四角形 ASRG

$= z_4 = x_4 - y_4$, 四角形 PQRS = w とおく。

(3) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}$ のとき, $x_i = \frac{1}{5}, y_i = \frac{1}{20}, z_i = \frac{3}{20}, w = \frac{1}{5} (i=1,2,3,4)$

(4) $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{3}, d = \frac{1}{3}$ のとき, $x_i = \frac{3}{20}, y_i = \frac{1}{60}, z_i = \frac{2}{15}, w = \frac{2}{5} (i=1,2,3,4)$

(5) $a = \frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{2}{3}, d = \frac{2}{3}$ のとき, $x_i = \frac{3}{13}, y_i = \frac{4}{39}, z_i = \frac{5}{39}, w = \frac{1}{13} (i=1,2,3,4)$

(6) $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{1}{3}, d = \frac{2}{3}$ のとき, $x_1 = x_3 = \frac{3}{22}, x_2 = x_4 = \frac{3}{11}, y_1 = y_3 = \frac{2}{33}, y_2 = y_4 = \frac{1}{33},$
 $z_1 = z_3 = \frac{5}{66}, z_2 = z_4 = \frac{8}{33}, w = \frac{2}{11}$

(7) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, c = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{3}$ のとき, $x_1 = x_3 = \frac{3}{14}, x_2 = x_4 = \frac{1}{7}, y_1 = y_3 = \frac{1}{42}, y_2 = y_4 = \frac{1}{28},$
 $z_1 = z_3 = \frac{4}{21}, z_2 = z_4 = \frac{3}{28}, w = \frac{2}{7}$

(8) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{1}{2}, d = \frac{2}{3}$ のとき, $x_1 = x_3 = \frac{3}{16}, x_2 = x_4 = \frac{1}{4}, y_1 = y_3 = \frac{1}{12}, y_2 = y_4 = \frac{1}{16},$
 $z_1 = z_3 = \frac{5}{48}, z_2 = z_4 = \frac{3}{16}, w = \frac{1}{8}$