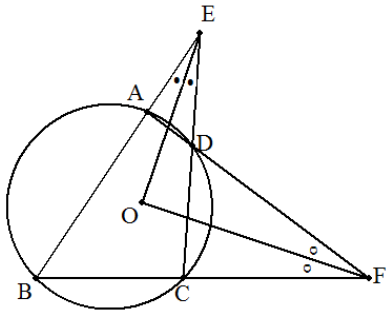
円に内接する四角形に内接するひし形について

1　はじめに

問題 12　円に内接する四辺形 ABCD の 2 組の対辺のなす角の各 2 等分線 EO，FO は垂直であることを証明せよ。



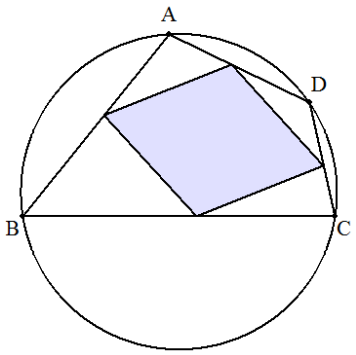
この問題は，参考文献にある「わかる幾何学」の 134 ページに掲載されている。この問題からヒントを得て，次の問題を考え，中学生にも分かるように解いてみた。

2　考えた問題

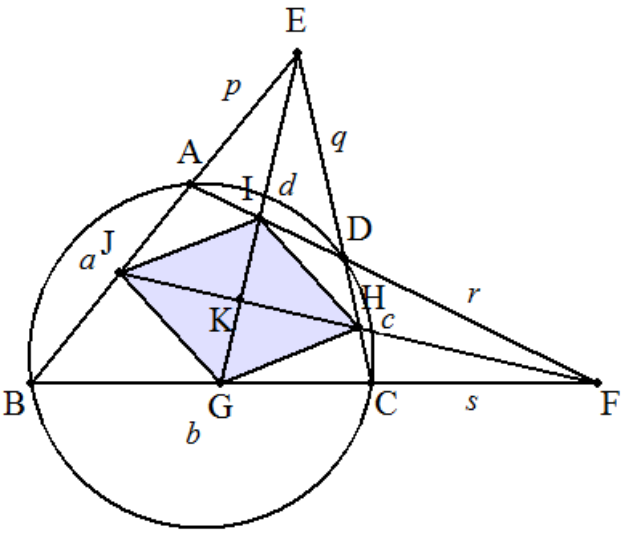
AB＝a，BC＝b，CD＝c，DA＝d である四角形 ABCD は円に内接している。このとき，四角形の各辺上に頂点をもつひし形について，

(1)　一辺の長さを求めよ。

(2)　面積を求めよ。



（解）(1)　与えられた図において，BA，CD の交点を E，BC，AD の交点を F とする。∠BEC の二等分線と BC，AD との交点をそれぞれ G，I，∠BFA の二等分線と CD，AB との交点をそれぞれ H，J とすると，四角形 GHIJ がひし形になることを証明する。



（証明）EG と FJ の交点を K とする。

△JBF∽△HDF であるから，

∠EJH＝∠JBF＋∠BFJ＝∠HDF＋∠DFH＝∠EHJ

よって△EJH は二等辺三角形となるから，

JK＝KH，EK⊥JH･･･①

同様に，△GBE∽△IDE であるから，

∠FGI＝∠GBE＋∠BEG＝∠IDE＋∠DEI＝∠FIG

よって△FIG は二等辺三角形となるから，

IK＝KG，FK⊥IG･･･②

①，②より四角形 GHIJ において，対角線が垂直で，互いに他を二等分しているのでひし形となる。■

次に，便宜的に，EA＝p，ED＝q，FD＝r，FC＝s とおき，ひし形の一辺と面積を求める。

角の二等分と比の定理より，

△FAB について，AJ＝$\dfrac{a(d+r)}{(d+r)+(b+s)}$，JB＝$\dfrac{a(b+s)}{(d+r)+(b+s)}$，△FDC について，DH＝$\dfrac{cr}{r+s}$

△EBC について，BG＝$\dfrac{b(a+p)}{(a+p)+(c+q)}$，GC＝$\dfrac{b(c+q)}{(a+p)+(c+q)}$，△EAD について，ID＝$\dfrac{dq}{p+q}$

△JBF∽△HDF であるから，JB：HD＝BF：DF

JB・DF＝HD・BF より，$\dfrac{a(b+s)}{(d+r)+(b+s)}\times r=\dfrac{cr}{r+s}\times(b+s)$

$a\neq c$ のとき，$r+s=\dfrac{c(b+d)}{a-c}\cdots$①

$a=c$ のとき，四角形 ABCD は等脚台形となり， BC，CD，DA，AB の中点をそれぞれ G，H，I，J とすると，四角形 GHIJ はひし形になる。この場合の一辺の長さと面積は後ほど考える。

同様に，△GBE∽△IDE であるから，GB：BE＝ID：DE

GB・DE＝BE・ID より，$\dfrac{b(a+p)}{(a+p)+(c+q)}\times q=(a+p)\times\dfrac{dq}{p+q}$

$b\neq d$ のとき，$p+q=\dfrac{d(a+c)}{b-d}\cdots$②

$b=d$ のとき，四角形 ABCD は等脚台形となり，この場合の一辺の長さと面積も後ほど考える。

次に，EJ＝EH より　EA＋AJ＝ED＋DH であるから，$p+\dfrac{a(d+r)}{(d+r)+(b+s)}=q+\dfrac{cr}{r+s}$

$q-p=\dfrac{a(d+r)}{(d+r)+(b+s)}-\dfrac{cr}{r+s}$

これに①を代入して整理すると，$q-p=\dfrac{d(a-c)}{b+d}\cdots$③

同様に，FI＝FG より　FD＋DI＝FC＋CG であるから，$r+\dfrac{dq}{p+q}=s+\dfrac{b(c+q)}{(a+p)+(c+q)}$

$r-s=\dfrac{b(c+q)}{(a+p)+(c+q)}-\dfrac{dq}{p+q}$

これに②を代入して整理すると，$r-s=\dfrac{c(b-d)}{a+c}\cdots$④

②，③を p,q について解くと

$p=\dfrac{d(ad+bc)}{(b+d)(b-d)},q=\dfrac{d(ab+cd)}{(b+d)(b-d)}$

同様に，①，④を r,s について解くと

$r=\dfrac{c(ab+cd)}{(a+c)(a-c)},s=\dfrac{c(ad+bc)}{(a+c)(a-c)}$

GI＝EG－EI で，　EG＝$\sqrt{EB\cdot EC-BG\cdot CG}$，EI＝$\sqrt{EA\cdot ED-AI\cdot DI}$ である。（※）

EG＝$\sqrt{EB\cdot EC-BG\cdot CG}$

$=\sqrt{(a+p)(c+q)-\dfrac{b(a+p)}{(a+p)+(c+q)}\cdot\dfrac{b(c+q)}{(a+p)+(c+q)}}=\dfrac{\sqrt{(a+p)(c+q)\{(a+c+p+q)^2-b^2\}}}{(a+c+p+q)}$

ここで，$a+p=a+\dfrac{d(ad+bc)}{(b+d)(b-d)}=\dfrac{b(ab+cd)}{(b+d)(b-d)}$，$c+q=c+\dfrac{d(ab+cd)}{(b+d)(b-d)}=\dfrac{b(ad+bc)}{(b+d)(b-d)}$，

$a+c+p+q=a+c+\dfrac{d(a+c)}{b-d}=\dfrac{b(a+c)}{b-d}$ より

$$\mathrm{EG}=\frac{\sqrt{\dfrac{b(ab+cd)}{(b+d)(b-d)}\cdot\dfrac{b(ad+bc)}{(b+d)(b-d)}\left[\left\{\dfrac{b(a+c)}{b-d}\right\}^2-b^2\right]}}{\dfrac{b(a+c)}{b-d}}=\frac{b\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(a-b+c+d)(a+b+c-d)}}{(a+c)(b+d)(b-d)}$$

同様に，$\mathrm{EI}=\sqrt{EA\cdot ED-AI\cdot DI}$ を計算すると，$\mathrm{EI}=\dfrac{d\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(a-b+c+d)(a+b+c-d)}}{(a+c)(b+d)(b-d)}$

よって，$\mathrm{GI}=\mathrm{EG}-\mathrm{EI}=\dfrac{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(a-b+c+d)(a+b+c-d)}}{(a+c)(b+d)}$ …⑤

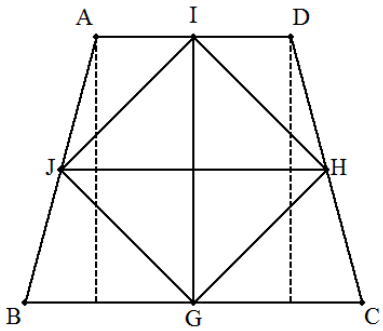
同様に，$\mathrm{HJ}=\mathrm{FJ}-\mathrm{FH}=\sqrt{FA\cdot FB-AJ\cdot BJ}\ -\sqrt{FD\cdot FC-DH\cdot CH}$ を計算すると

$\mathrm{HJ}=\dfrac{\sqrt{(ab+cd)(ad+bc)(-a+b+c+d)(a+b-c+d)}}{(a+c)(b+d)}$ …⑥

⑤，⑥より，ひし形の一辺の長さは，

$$\sqrt{\left(\frac{GI}{2}\right)^2+\left(\frac{HJ}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{(a+c)(b+d)}\cdots⑦$$

最後に，$a=c$ のとき，等脚台形 ABCD の BC，CD，DA，AB の中点をそれぞれ G，H，I，J とすると，四角形 GHIJ はひし形となる。



$\mathrm{GI}=\sqrt{AB^2-\left(\dfrac{BC-DA}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{b-d}{2}\right)^2}$,

$\mathrm{HJ}=\dfrac{BC+DA}{2}=\dfrac{b+d}{2}$ であるから

ひし形の一辺の長さは，

$$\sqrt{\left(\frac{GI}{2}\right)^2+\left(\frac{HJ}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{GI^2+HJ^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-\left(\frac{b-d}{2}\right)^2+\left(\frac{b+d}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+bd}}{2}$$

この結果は，⑦で $a=c$ と置いたものに一致する。

$b=d$ の場合も同様に⑦の結果と一致するから，以上より

ひし形の一辺の長さは　$\dfrac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{(a+c)(b+d)}\cdots$（答）

(2)　⑤，⑥より，　$a\neq c, b\neq d$ のときは，ひし形の面積は，

$$\frac{1}{2}\mathrm{GI}\cdot\mathrm{HJ}=\frac{(ab+cd)(ad+bc)\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2(a+c)^2(b+d)^2}\cdots⑧$$

$a=c$ のとき，(1)より

GI$=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{b-d}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{(2a-b+d)(2a+b-d)}}{2}$，HJ$=\dfrac{b+d}{2}$ であるから

ひし形の面積は，$\dfrac{1}{2}$GI・HJ$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{(2a-b+d)(2a+b-d)}}{2}\cdot\dfrac{b+d}{2}=\dfrac{(b+d)\sqrt{(2a-b+d)(2a+b-d)}}{8}$

この結果は，⑧で$a=c$と置いたものに一致する。

$b=d$ の場合も同様に⑧の結果に一致するから，以上よりひし形の面積は，

$$\frac{(ab+cd)(ad+bc)\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{2(a+c)^2(b+d)^2}\cdots\text{（答）}$$

3　補足

円に内接する四角形 ABCD の 4 辺の長さが，AB$=a$，BC$=b$，CD$=c$，DA$=d$ であるとき，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=\frac{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{4}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$\left(p=\frac{a+b+c+d}{2}\right)$$

であることが，知られている。（参考文献［2］参照）

これを用いると，ひし形の面積は，$\dfrac{2(ab+cd)(ad+bc)}{(a+c)^2(b+d)^2}S$ と表すことができ，四角形 ABCD の面積 S との比がわかる。

また，四角形 ABCD の外接円の半径 R は

$$R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4S}$$ であるから，

ひし形の一辺の長さは，$\dfrac{4S}{(a+c)(b+d)}R$ と表すことができ，四角形 ABCD の外接円の半径 R との比がわかる。

（参考文献［2］参照）

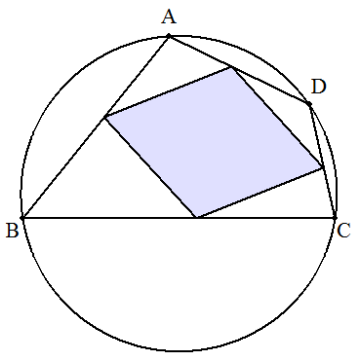
4　おわりに

具体例を作ってみた。高校生なら，どのように求めるのであろうか。

AB＝6，BC＝8，CD＝3，DA＝4 である四角形 ABCD は円に内接している。四角形の各辺上に頂点をもつひし形について，

(1)　一辺の長さを求めよ。

(2)　面積を求めよ。



（答）

(1)　$\dfrac{10\sqrt{10}}{9}$

(2)　$\dfrac{50\sqrt{39}}{27}$

【参考文献】

［1］　わかる数学全書Ⅲ　わかる幾何学（秋山武太郎著，春日屋伸昌改訂／日新出版／1990 年 7 月 30 日 13 版発行）

［2］　時岡郁夫の Website（http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/）にある「こだわり数学」58.円に内接する四角形の対角線について

［3］　（※）について，時岡郁夫の Website（http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/）にある「趣味の数学問題集」B112(3)にある内角の二等分線の公式を使用。

（2014/11/22　時岡）