

階差数列考

1 はじめに

階差数列を用いて、与えられた数列の一般項を求める問題がある。

【例題 1】(佐賀大 2003)

数列 $\{a_n\}: 1, 2, 4, 10, 23, 46, 82, 134, \dots$ がある。 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。 $\{b_n\}$ の階差数列が等差数列のとき、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。また、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【解答】

$$\begin{array}{cccccccc} \{a_n\}: & 1 & 2 & 4 & 10 & 23 & 46 & 82 & 134 \\ & & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \\ \{b_n\}: & 1 & 2 & 6 & 13 & 23 & 36 & 52 & \\ & & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \vee & \\ & & 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & \end{array}$$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とおく。

$\{c_n\}: 1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots$ であるから $c_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$

$n \geq 2$ のとき $b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k - 2) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - 2(n-1) = \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 6)$

$n = 1$ のとき、 $b_1 = 1$ となり成り立つ。よって $b_n = \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 6)$ 〇

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき } a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 - 7k + 6) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 2 + \frac{1}{2}(n-1)n(2n-1) - \frac{7}{2}(n-1)n + 6(n-1) \right\} \\ &= \frac{1}{2}(n^3 - 5n^2 + 10n - 4) \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき、 $a_1 = 1$ となり成り立つ。よって $a_n = \frac{1}{2}(n^3 - 5n^2 + 10n - 4)$ 〇

この例題の場合、第 2 階差数列が等差数列になるので、 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k (n \geq 2)$ の公式を 2 回使うことになる。さらに問題が、「数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。」と続くと、 Σ の計算を 3 回することになり計算が大変である。

【別解】第 2 階差数列が等差数列になるので、 $a_n = pn^3 + qn^2 + rn + s$ とおける。

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 10$ より、

$$p + q + r + s = 1, \quad 8p + 4q + 2r + s = 2, \quad 27p + 9q + 3r + s = 4, \quad 64p + 16q + 4r + s = 10$$

これらを連立させて解くと、 $p = \frac{1}{2}, q = -\frac{5}{2}, r = 5, s = -2$

よって、 $a_n = \frac{1}{2}n^3 - \frac{5}{2}n^2 + 5n - 2 = \frac{1}{2}(n^3 - 5n^2 + 10n - 4) \cdots$ (答)

Σ の計算をしない分、 Σ の計算の苦手な生徒でも計算できると思う。しかし、この方法でも連立方程式を解くのが面倒である。

そこで、第1階差数列、第2階差数列、 $\dots$ を作り、それらの初項を用いて一般項 a_n や初項から第 n 項までの和 S_n を求める公式を紹介する。

2 補題

$$\sum_{k=1}^{n-1} (k-1)(k-2)\cdots(k-l) = \frac{1}{l+1} (n-1)(n-2)\cdots(n-l-1)$$

(証明)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)(k-2)\cdots(k-l) \\ &= \frac{1}{l+1} \sum_{k=1}^{n-1} \{k(k-1)(k-2)\cdots(k-l) - (k-1)(k-2)\cdots(k-l)(k-l-1)\} \\ &= \frac{1}{l+1} (n-1)(n-2)\cdots(n-l-1) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3 数列の一般項と初項から第 n 項までの和を、階差数列の初項を用いて求める公式

数列 $\{a_n\}$ に対して、 $\{a^{(k)}_n\} (k=1,2,\dots,m)$ を第 k 階差数列とする。 $a^{(m)}_{n+1} - a^{(m)}_n = 0$ のとき、

数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^m \frac{a^{(k)}_1}{k!} (n-1)(n-2)\cdots(n-k) \quad (a_1, a^{(1)}_1, a^{(2)}_1, \dots, a^{(m)}_1 \text{は各数列の初項})$$

初項から第 n 項までの和 S_n は、

$$S_n = \sum_{k=0}^m \frac{a^{(k)}_1}{(k+1)!} n(n-1)\cdots(n-k) \quad (\text{ただし、} a^{(0)}_1 = a_1 \text{とする。})$$

この公式を使うと、例題1の一般項は、次のように簡単に求められる。

【別解2】 $a_1=1$, $a^{(1)}_1=1$, $a^{(2)}_1=1$, $a^{(3)}_1=3$ であるから

$$a_n = 1 + 1(n-1) + \frac{1}{2!}(n-1)(n-2) + \frac{3}{3!}(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{2}(n^3 - 5n^2 + 10n - 4) \quad \cdots (\text{答})$$

さらに問題が、「数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。」と続くと

$$S_n = \frac{1}{1!}n + \frac{1}{2!}n(n-1) + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2) + \frac{3}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{24}n(3n^3 - 14n^2 + 33n + 2)$$

と求められ、一般項 a_n が分からなくても求められる。

【公式の証明】

$$\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$\{a^{(1)}_n\}: a^{(1)}_1, a^{(1)}_2, a^{(1)}_3, \dots$$

$$\{a^{(2)}_n\}: a^{(2)}_1, a^{(2)}_2, a^{(2)}_3, \dots$$

.....

$$\{a^{(m)}_n\}: a^{(m)}_1, a^{(m)}_2, a^{(m)}_3, \dots$$

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a^{(1)}_k, \quad a^{(1)}_n = a^{(1)}_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a^{(2)}_k, \quad a^{(2)}_n = a^{(2)}_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a^{(3)}_k, \quad \dots, \quad a^{(m-1)}_n = a^{(m-1)}_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a^{(m)}_k$$

仮定より $a^{(m)}_{n+1} - a^{(m)}_n = 0$ であるから, $a^{(m)}_n = a^{(m)}_1$

$$\therefore a^{(m-1)}_n = a^{(m-1)}_1 + a^{(m)}_1(n-1)$$

これは, $n=1$ のときも成り立つ。

$$\therefore a^{(m-2)}_n = a^{(m-2)}_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \{a^{(m-1)}_1 + a^{(m)}_1(k-1)\}$$

$$= a^{(m-2)}_1 + a^{(m-1)}_1(n-1) + \frac{a^{(m)}_1}{2!}(n-1)(n-2)$$

これは, $n=1$ のときも成り立つ。

以下, 補題を適用して

$$\begin{aligned} \therefore a^{(m-3)}_n &= a^{(m-3)}_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ a^{(m-2)}_1 + a^{(m-1)}_1(k-1) + \frac{a^{(m)}_1}{2!}(k-1)(k-2) \right\} \\ &= a^{(m-3)}_1 + a^{(m-2)}_1(n-1) + \frac{a^{(m-1)}_1}{2!}(n-1)(n-2) + \frac{a^{(m)}_1}{3!}(n-1)(n-2)(n-3) \\ &= a^{(m-3)}_1 + \sum_{k=1}^3 \frac{a^{(m-3+k)}_1}{k!}(n-1)(n-2) \cdots (n-k) \end{aligned}$$

これは, $n=1$ のときも成り立つ。

.....

このことから, 帰納的に次の結果が得られる。ただし, $a^{(0)}_n = a_n$ とする。

$$\therefore a_n = a_1 + \sum_{k=1}^m \frac{a^{(k)}_1}{k!}(n-1)(n-2) \cdots (n-k)$$

次に, 補題と同様に $\sum_{k=1}^n (k-1)(k-2) \cdots (k-l) = \frac{1}{l+1} n(n-1)(n-2) \cdots (n-l)$ となるから,

$$S_n = a_1 n + \sum_{k=1}^m \frac{a^{(k)}_1}{k!(k+1)} n(n-1) \cdots (n-k) = \sum_{k=0}^m \frac{a^{(k)}_1}{(k+1)!} n(n-1) \cdots (n-k)$$

(ただし, $a^{(0)}_1 = a_1$ とする。) ■

【例題 2】

数列 $\{a_n\} : 1, 15, 65, 175, 369, 671, 1105, \dots$ の一般項 a_n と初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(解) 数列 $\{a_n\} : \boxed{1}, 15, 65, 175, 369, 671, 1105, \dots$

階差をとると $\boxed{14}, 50, 110, 194, 302, 434, \dots$

$\boxed{36}, 60, 84, 108, 132, \dots$

$\boxed{24}, 24, 24, 24, \dots$

$$\therefore a_n = 1 + 14(n-1) + \frac{36}{2!}(n-1)(n-2) + \frac{24}{3!}(n-1)(n-2)(n-3) = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 \dots (\text{答})$$

$$\text{次に, } S_n = \frac{1}{1!}n + \frac{14}{2!}n(n-1) + \frac{36}{3!}n(n-1)(n-2) + \frac{24}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3) = n^4 \dots (\text{答})$$

【演習問題】

数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n と初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) $\{a_n\} : 6, 24, 60, 120, 210, 336, 504, \dots$ (岩手大・農)

(2) $\{a_n\} : 1, 31, 211, 781, 2101, 4651, 9031, 15961, \dots$

$$(\text{答}) (1) \quad a_n = n(n+1)(n+2), \quad S_n = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$(2) \quad a_n = 5n^4 - 10n^3 + 10n^2 - 5n + 1, \quad S_n = n^5$$

【参考文献】

[1] 時岡郁夫の Website (<http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/>) 趣味の数学問題集 B 問題 19