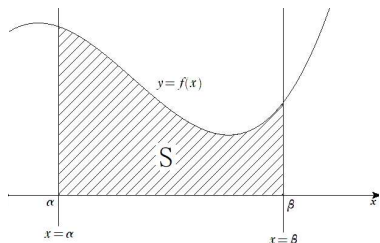


曲線で囲まれる面積の公式

1. 面積の公式 (基本)

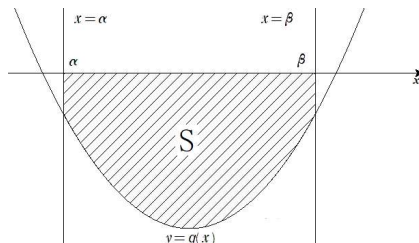
(1) x 軸の上側の面積

$$S = \int_a^b f(x) dx$$



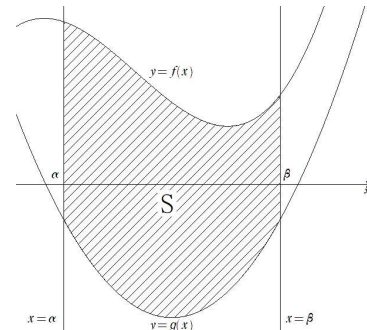
(2) x 軸の下側の面積

$$S = -\int_a^b g(x) dx$$



(3) 2 曲線の間の面積

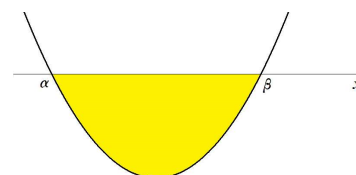
$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$



2. 放物線 $y = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ ($\alpha < \beta$)

と x 軸によって囲まれる部分の面積 S は,

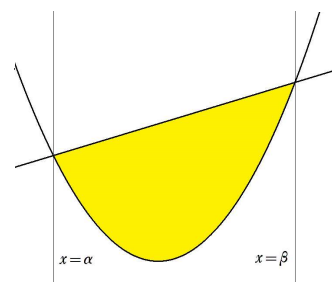
$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |a(x-\alpha)(x-\beta)| dx = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$



3. 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = mx + n$ によって
囲まれる図形の面積 S は,

$$S = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$$

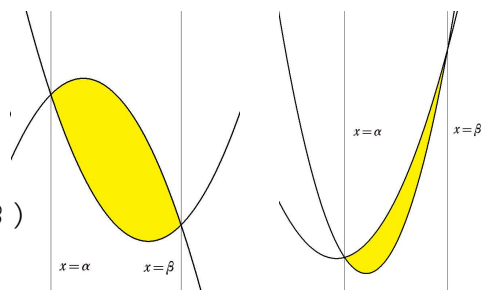
※ α, β は $ax^2 + bx + c = mx + n$ の 2 解 ($\alpha < \beta$)



4. 2 つの放物線 $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$
($a_1 \neq a_2$) によって囲まれる図形の面積 S は,

$$S = \frac{|a_1 - a_2|}{6}(\beta - \alpha)^3$$

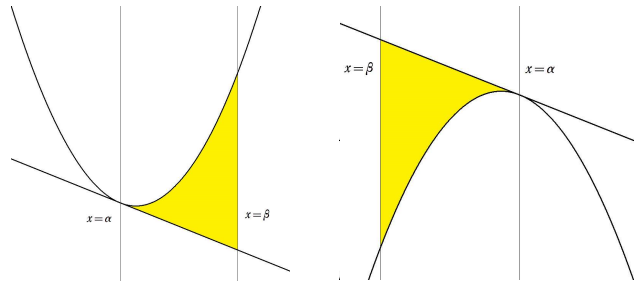
※ α, β は $a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$ の 2 解 ($\alpha < \beta$)



5. 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = mx + n$ は $x = \alpha$ で接する。

$\alpha \leq x \leq \beta$ または $\beta \leq x \leq \alpha$ の部分の面積 S は、

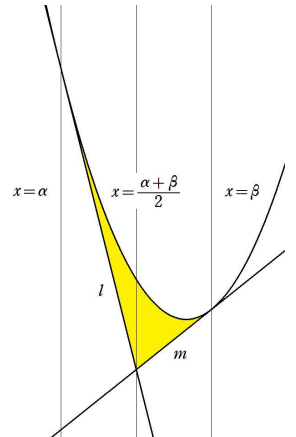
$$S = \frac{|a|}{3} |\beta - \alpha|^3$$



6. 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と2つの接線 l, m との接点をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$) とすると、放物線と2つの接線によって囲まれる部分の面積 S は、

$$S = \frac{|a|}{12} (\beta - \alpha)^3$$

なお、2つの接線の交点の x 座標は、 $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$

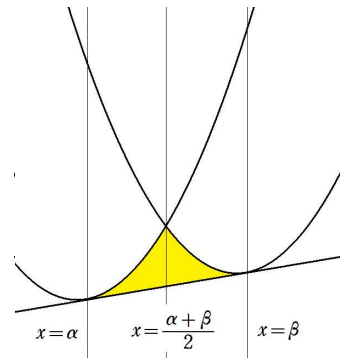


7. 2つの放物線 $y = ax^2 + b_1x + c_1$, $y = ax^2 + b_2x + c_2$ の共通接線 l によって囲まれる図形の面積 S は、

$$S = \frac{|b_1 - b_2|^3}{96a^2} = \frac{|a|}{12} (\beta - \alpha)^3$$

$x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) は接点

なお、2つの放物線の交点の x 座標は、 $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$

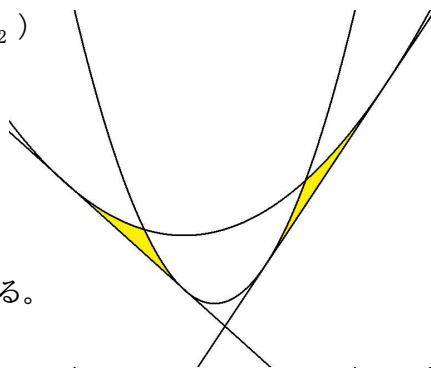


8. 2つの放物線 $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ ($a_1 \neq a_2$) の共通接線が2つあるとき, 2つの放物線と共通接線によって囲まれる図形は2つできるが, どちらの面積 S も,

$$S = \frac{D^{\frac{3}{2}}}{24\sqrt{a_1a_2}(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2}$$

ただし, D は $(a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + c_1 - c_2 = 0$ の判別式である。

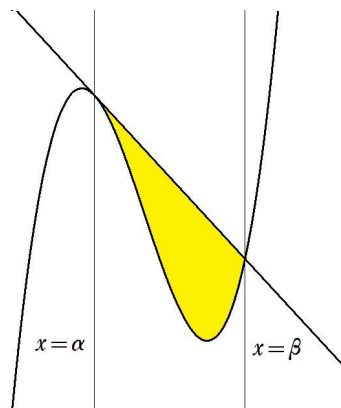
$$\text{i.e. } D = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)$$



9. 3次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とその接線によって囲まれる部分の面積 S は,

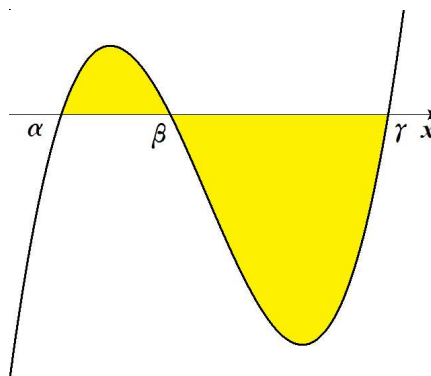
$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^4$$

ただし, 接点 $x = \alpha$, 交点 $x = \beta = -2\alpha - \frac{b}{a}$



10. $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ ($\alpha < \beta < \gamma$) のとき, 3次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ と x 軸によって囲まれる部分の面積 S は, $\beta - \alpha = p$, $\gamma - \beta = q$ とおくと,

$$\begin{aligned} S &= \frac{|a|}{12} \{p^3(p + 2q) + q^3(2p + q)\} \\ &= \frac{|a|}{12} \{(p^2 + pq + q^2)^2 - 3(pq)^2\} \end{aligned}$$



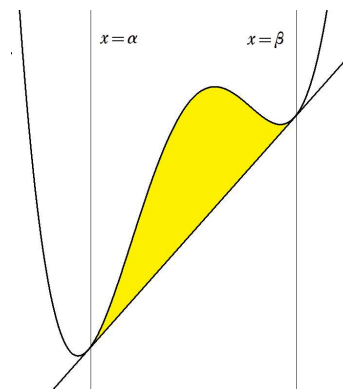
11. 4 次関数 $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ と 2 点で接する直線によって囲まれる部分の面積 S は,

$$S = \frac{|a|}{30}(\beta - \alpha)^5 = \frac{(3b^2 - 8ac)^{\frac{5}{2}}}{960a^2}$$

ただし, α, β ($\alpha < \beta$) は接点の x 座標である。

※共通接線が x 軸でも成り立つ。

※ d, e の値は面積に依存しない定数であることがわかる。



12. 参考 $y = (x - \alpha)^m(x - \beta)^n$ と x 軸によって囲まれる部分の面積 S は,

$$S = (-1)^n \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (x - \beta)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

(2021/2/26 時岡)