三角形の面積と内接円の半径

△ABCについて，BC＝a，CA＝b，AB＝cとする。$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくと，

(1)　三角形の面積 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(2)　内接円の半径 $r=\dfrac{S}{s}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

証明

(1)　余弦定理より，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=(1+\cos A)(1-\cos A)=\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

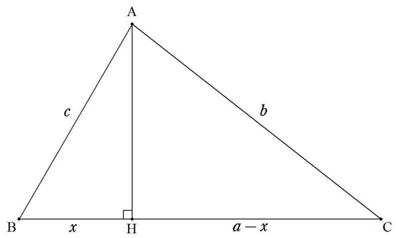
$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{(2bc)^2}$$

$$=\frac{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)}{(2bc)^2}=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}$$

$0°<A<180°$ より $\sin A>0$ であるから，$\sin A=\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}$

よって，$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\cdot\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　終

別解　A から BC に下した垂線の足を H とすると，$S=\dfrac{1}{2}$ BC･AH



BH＝x とおくと，CH＝$a-x$

△ABH，△ACHは直角三角形であるから，三平方の定理により

$\mathrm{AH}^2=c^2-x^2=b^2-(a-x)^2$　$\therefore\ x=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}$

$$\mathrm{AH}^2=c^2-x^2=(c+x)(c-x)=\left(c+\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)\left(c-\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)=\frac{(c+a)^2-b^2}{2a}\cdot\frac{b^2-(c-a)^2}{2a}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b-c)}{(2a)^2}=\frac{2s\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-c)}{(2a)^2}=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

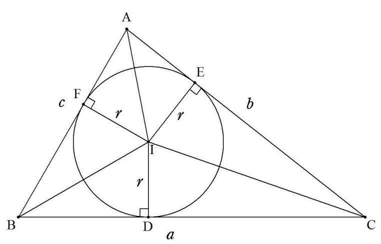
AH>0 より，$\mathrm{AH}=\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$

よって，$S=\dfrac{1}{2}a\cdot\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　終

(2)　△ABC の内心を I とおくと，S＝△IBC＋△ICA＋△IAB であるから，

$S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r=sr$ より，

$r=\dfrac{S}{s}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$　終



(2002/10/9　時岡)