円に内接する四角形の面積

円に内接する四角形 ABCD について,

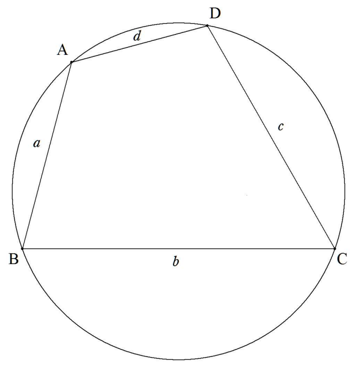
AB$=a$, BC$=b$, CD$=c$, DA$=d$,

$s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ とおくと,

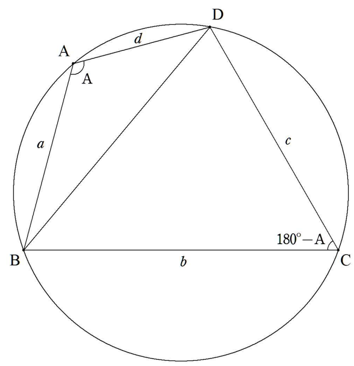
四角形ABCDの面積 S は,

$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

である。



証明



∠DAB=Aとおくと, ∠BCD=180°−A である。

$S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{CDB}=\dfrac{1}{2}ad\sin A+\dfrac{1}{2}bc\sin(180°-A)$

$=\dfrac{1}{2}(ad+bc)\sin A$ …①

△ABD, △CDBに余弦定理を適用すると,

$\mathrm{BD}^2=a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos(180°-A)$

$=b^2+c^2+2bc\cos A$

$\cos A$ について解くと, $\cos A=\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$

$\sin^2 A=1-\cos^2 A=(1+\cos A)(1-\cos A)=\left\{1+\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\right\}\left\{1-\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}\right\}$

$=\dfrac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2(ad+bc)}\cdot\dfrac{(b+c)^2-(a-d)^2}{2(ad+bc)}=\dfrac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{4(ad+bc)^2}$

$=\dfrac{2(s-c)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-d)\cdot 2(s-a)}{4(ad+bc)^2}=\dfrac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ad+bc)^2}$

$0°<A<180°$ のとき, $\sin A>0$ であるから, $\sin A=\dfrac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ad+bc}$

これを①に代入して, $S=\dfrac{1}{2}(ad+bc)\cdot\dfrac{2\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{ad+bc}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ 終

(2002/10/9 時岡)