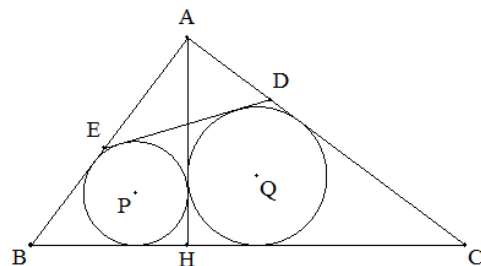


直角三角形内の 2 円に関するいくつかの性質

$\angle A=90^\circ$ の $\triangle ABC$ の頂点 A から BC に下ろした垂線の足を H , $\triangle ABH$, $\triangle ACH$ の内接円の中心をそれぞれ P , Q , 2 つの円の BC でない共通外接線と CA , AB との交点をそれぞれ D , E とする。 $\triangle ABC$ の内接円, 外接円の半径をそれぞれ, r , R , 円 P , Q の半径をそれぞれ r_1 , r_2 とする。

次が成り立つ。

- (1) $\angle ADE = \angle ABC$
($\Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE \Leftrightarrow$ 四角形 $EBCD$ は円に内接)
- (2) $DE = 2r$
- (3) 四角形 $EBCD$ の外接円の半径は $\sqrt{R^2 + r^2}$
- (4) $AH = r + r_1 + r_2$
- (5) PQ と CA , AB との交点をそれぞれ U , V とすると, $AU = AV = AH$
- (6) 内接円と BC との接点を L とすると, $HL = |r_1 - r_2| = \frac{1}{2} |(BH - HC) - (AB - AC)|$
- (7) 内接円の中心を I , AH と DE の交点を F とすると, $IF = \sqrt{(r - r_1)^2 + (r - r_2)^2}$
- (8) $\triangle ADE$ の内接円の半径を r_3 とすると, $\frac{r_1 r_2}{r_3} = \frac{1}{2} AH$



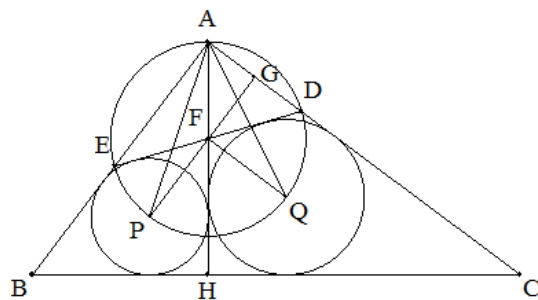
(証明)

- (1) AH と DE の交点を F とする。

$$\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle BAH + \frac{1}{2} \angle CAH = 45^\circ$$

$$\angle PFQ = \frac{1}{2} \angle EFH + \frac{1}{2} \angle DFH = 90^\circ$$

$$\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle PFQ \text{ (円周角と中心角の関係) が成り立つから,}$$



F は $\triangle APQ$ の外心となる。 $\therefore FA = FP = FQ$

次に, PF と CA の交点を G とする。

$\angle FQA = \angle FAQ = \angle QAC$ であるから, $FQ \parallel AC$ (錯角が等しいから)

$\angle PFQ = 90^\circ$ であるから, $\angle FGD = 90^\circ$

$\triangle FDG$ と $\triangle FAG$ について, FG は共通, $\angle DFG = \angle AFG$, $\angle FGD = \angle FGA (= 90^\circ)$ より 2 角夾辺 (1 辺両端角) が等しいから, $\triangle FDG \cong \triangle FAG$ より $\angle GDF = \angle GAF$ となる。

よって, $\angle ADE = \angle GDF = \angle GAF = \angle CAH = \angle ABC$ ■

(補足) $\triangle FDG \cong \triangle FAG$ より $FD = FA$ 。同様に $FE = FA$ となるから, D, E も $\triangle APQ$ の外接円上にある。

$\angle ADE = \angle ABC$ のとき, $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 。また, 四角形 $EBCD$ は円に内接する。

- (2) P, Q から DE に下ろした垂線の足をそれぞれ J, K とする。

$\triangle KFQ$ と $\triangle ABC$ について,

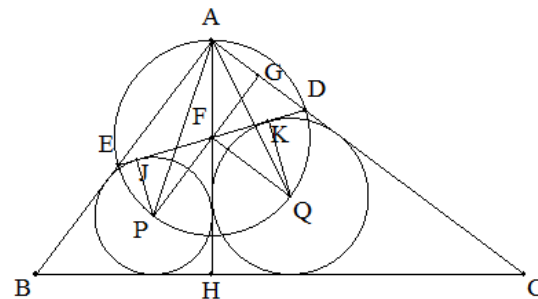
$$\angle QFK = \angle ADE \text{ (} \because FQ \parallel AC \text{)} = \angle ABC \text{ (} \because (1) \text{)}$$

$$\angle QKF = \angle CAB (= 90^\circ)$$

よって, 対応する 2 角が等しいから, $\triangle KFQ \sim \triangle ABC \dots \textcircled{1}$

また, $\triangle JPF$ と $\triangle KFQ$ について, 共に直角三角形で

$FP = QF$, $\angle JPF = 90^\circ - \angle PFJ = \angle KFQ$ より



$$\triangle JPF \equiv \triangle KFQ \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$BC=a, \quad CA=b, \quad AB=c \text{ とおくと, 三平方の定理から } a^2=b^2+c^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\triangle ABC, \triangle HBA, \triangle HAC$ の内接円の半径をそれぞれ, r, r_1, r_2 とすると, ①, ②より

$\triangle ABC, \triangle HBA, \triangle HAC$ はすべて相似で, 相似比は, $a:c:b$ であるから,

$$r:r_1:r_2=a:c:b, \quad \text{これと③より, } r^2=r_2^2+r_1^2 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\text{一方, } \triangle KFQ \text{ は直角三角形で, } FQ=\frac{1}{2}DE, \quad QK=r_2, \quad KF=JP=r_1 \text{ であるから, } \left(\frac{1}{2}DE\right)^2=r_2^2+r_1^2 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ より } r=\frac{1}{2}DE \quad \therefore DE=2r \quad \blacksquare$$

- (3) 四角形 $EBCD$ の外接円の中心を R , 半径を R' , BR の延長と外接円の交点を B' とする。 $BB'=2R'$ となる。

四角形 $DBB'C$ は円に内接するから, $\angle B'CD=180^\circ-\angle DBB'$

また, $\angle B'CD=90^\circ+\angle BCD=90^\circ+90^\circ-\angle EBC=180^\circ-\angle EBC$

であるから, $\angle DBB'=\angle EBC$

それぞれから, $\angle DBC$ を引くと $\angle CBB'=\angle EBD$

円周角と弧の関係から, $B'C=DE=2r \quad (\because \textcircled{2})$

$\triangle ABC$ の外接円の半径が R であるから $BC=2R$

$\triangle CBB'$ に三平方の定理を適用すると,

$$(2R')^2=(2R)^2+(2r)^2 \quad \text{よって, } R'=\sqrt{R^2+r^2} \quad \blacksquare$$

- (4) Q から AH に下ろした垂線の足を K' とおく。

②より $\triangle JPF \equiv \triangle KFQ$ であるから, $FK=r_1$

また, $\triangle KFQ \equiv \triangle K'FQ$ より, $FK'=r_1$

よって, $AH=AF+FK'+K'H=r+r_1+r_2 \quad \blacksquare$

- (5) DE と CB の交点を S とすると (図に示していない), $\angle ESB=B-C \quad (\because \angle BES=C, \angle EBC=B)$

UV は $\angle ESB$ の二等分線であるから, $\angle USC=\frac{B-C}{2}$

$\triangle USC$ の外角を考えると, $\angle SCU=C$ であるから, $\angle AVU$

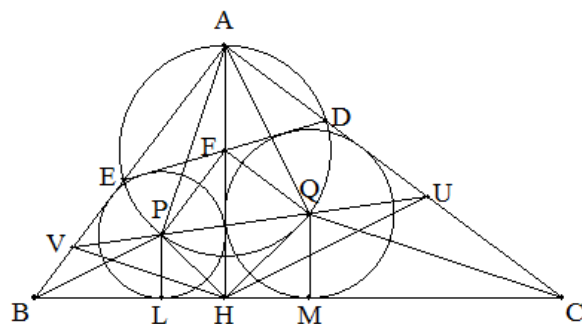
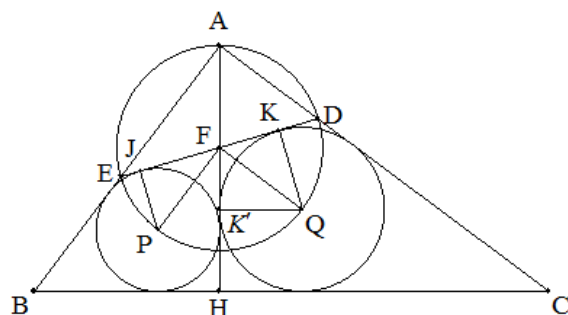
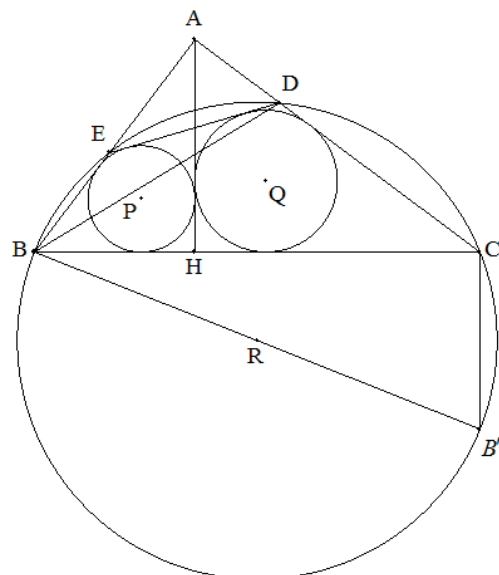
$$=\frac{B-C}{2}+C=\frac{B+C}{2}=45^\circ$$

よって, $\triangle AVU$ は直角二等辺三角形となるから, $AU=AV \quad \cdots \textcircled{1}$

P, Q から BC に下ろした垂線の足をそれぞれ L, M とする。 $\triangle PLH$ と $\triangle QMH$ は共に直角二等辺三角形で

あるから, $HP=\sqrt{2}r_1, \quad HQ=\sqrt{2}r_2$ である。

(1)より, $\angle ADE=\angle ABC=B$ とおくと, $\angle QFH=2\angle QAF=B \quad \cdots \textcircled{2}$



また、四角形 FPHQ の頂点 F, H について、対角の和が 180° であるから、円に内接する。

$$\angle QFH = \angle QPH \quad \cdots \textcircled{3}$$

$\therefore \triangle PHQ$ において、 $\angle QPH = B$ ($\because \textcircled{2}, \textcircled{3}$) となるから、 $\angle PQH = C$ となり、 $\triangle HPQ \sim \triangle ABC$
 $\triangle ABC$, $\triangle HBA$, $\triangle HAC$ はすべて相似で、相似比は、 $a : c : b$ であるから、 $r : r_1 : r_2 = a : c : b$

$$HP = \sqrt{2}r_1, HQ = \sqrt{2}r_2 \text{ であるから, } PQ = \sqrt{2}r$$

四角形 VBHP は円に内接する ($\because \angle B = \angle QPH$) から、円周角の定理により

$$\angle PVH = \angle PBH = \angle VBP = \angle VPP$$

$$\triangle PVH \text{ は二等辺三角形であるから, } PV = PH = \sqrt{2}r_1$$

$$\text{同様に, } \triangle QHU \text{ も二等辺三角形になるから, } QU = QH = \sqrt{2}r_2$$

$$\text{よって, } UV = QU + PQ + VP = \sqrt{2}r_2 + \sqrt{2}r + \sqrt{2}r_1 = \sqrt{2}AH \quad (\because \textcircled{4})$$

$$\text{また, } \triangle AVU \text{ は直角二等辺三角形であるから, } AU = \frac{UV}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}AH}{\sqrt{2}} = AH$$

$$\text{従って, } \textcircled{1}, \textcircled{4} \text{ より } AU = AV = AH \quad \blacksquare$$

$$(6) \quad s = \frac{a+b+c}{2}, \quad r = \frac{b+c-a}{2} \text{ とおく。}$$

$$HL = |BW - BH| = \left| (s-b) - \frac{c^2}{a} \right| = \left| \frac{a-b+c}{2} - \frac{c^2}{a} \right| = \left| \frac{a^2 - a(b-c) - 2c^2}{2a} \right|$$

$$= \left| \frac{b^2 - c^2 - a(b-c)}{2a} \right| = \left| \frac{(b-c)(b+c-a)}{2a} \right| = \frac{|b-c|}{a} r$$

$$|r_1 - r_2| = \left| \frac{c}{a}r - \frac{b}{a}r \right| = \frac{|b-c|}{a} r$$

$$\frac{1}{2} |(BH - HC) - (AB - AC)| = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{c^2}{a} - \frac{b^2}{a} \right) - (c-b) \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{(c-b)(b+c-a)}{a} \right| = \frac{|b-c|}{a} r$$

$$\text{よって, } HL = |r_1 - r_2| = \frac{1}{2} |(BH - HC) - (AB - AC)| \quad \blacksquare$$

(7) I から BC, AH に下ろした垂線の足をそれぞれ L, M とする。

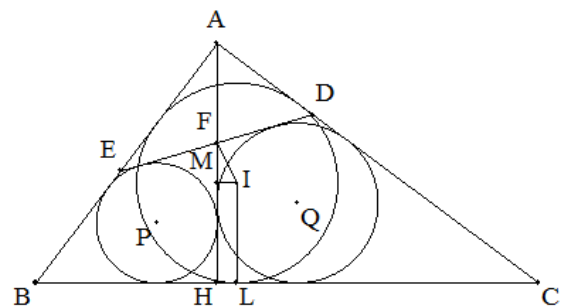
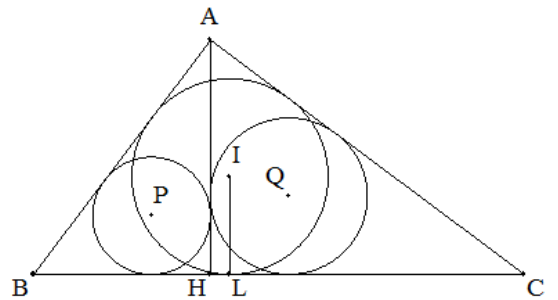
$\triangle FMI$ において、

$$FM = AH - (AF + IL) = (r + r_1 + r_2) - (r + r) = r_1 + r_2 - r$$

$$= \frac{c}{a}r + \frac{b}{a}r - r = \frac{b+c-a}{a}r$$

$$MI = BL - BH = (s-b) - \frac{c^2}{a} = \frac{a-b+c}{2} - \frac{c^2}{a}$$

$$= \frac{a^2 - a(b-c) - 2c^2}{2a} = \frac{b^2 - c^2 - a(b-c)}{2a} = \frac{(b-c)(b+c-a)}{2a} = \frac{b-c}{a}r$$

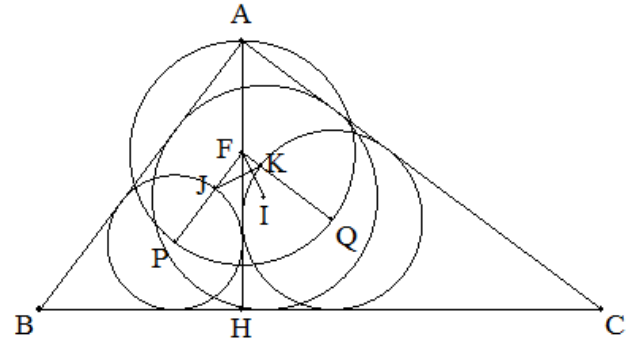


であるから、三平方の定理を適用して

$$\begin{aligned} IF &= \sqrt{FM^2 + MI^2} = \sqrt{\left(\frac{b+c-a}{a}r\right)^2 + \left(\frac{b-c}{a}r\right)^2} = \frac{\sqrt{(b+c-a)^2 + (b-c)^2}}{a}r = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2) - 2a(b+c) + a^2}}{a}r \\ &= \frac{\sqrt{2a^2 - 2a(b+c) + b^2 + c^2}}{a}r = \frac{\sqrt{(a-c)^2 + (a-b)^2}}{a}r = \sqrt{\left(r - \frac{b}{a}r\right)^2 + \left(r - \frac{b}{a}r\right)^2} = \sqrt{(r-r_1)^2 + (r-r_2)^2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(補足) 図のように、FP と円 P、FQ と円 Q の交点をそれぞれ J、K とすると、FJ = r - r₁、FK = r - r₂、∠JFK

= 90° となるから、JK = √{(r - r₁)² + (r - r₂)²} = IF である。

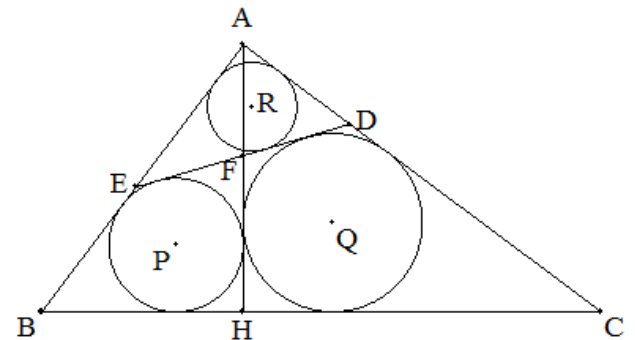


(8) △ABC, △HBA, △HAC, △ADE は互いに相似で、相

似比は、a : c : b : 2r であるから、 $\frac{r}{a} = \frac{r_1}{c} = \frac{r_2}{b} = \frac{r_3}{2r}$ より、

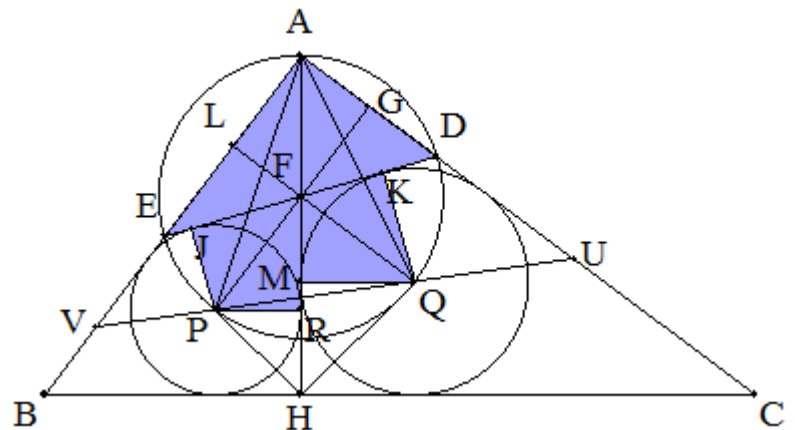
$r_1 = \frac{c}{a}r, r_2 = \frac{b}{a}r, r_3 = \frac{2}{a}r^2$ である。

このとき、 $\frac{r_1 r_2}{r_3} = \frac{\frac{c}{a}r \cdot \frac{b}{a}r}{\frac{2}{a}r^2} = \frac{bc}{2a} = \frac{aAH}{2a} = \frac{1}{2}AH \quad \blacksquare$



(補足)

- (1) 5 点 A, E, P, Q, D は F を中心、半径 r の円周上の点
- (2) 8 個の三角形 LFA, LFE, GAF, GDF, JPF, RPF, MFQ, KFQ はすべて合同で、△ABC に相似
- (3) △LFA について、AL = r₂, LF = r₁, FA = r
- (4) △ADE ∼ △HPQ ∼ △ABC
- (5) △FPQ, △AUV は直角二等辺三角形



【参考文献】

1. 初等数学第 72 号 (2013 年 9 月号) 課題 71-5 の解説 (横田捷宏氏)
2. 時岡郁夫の HP (<http://www.phoenix-c.or.jp/~tokioka/>) の「趣味の数学問題集」A 問題 158 (2012/12/19 に Upload)

(2019/7/11 時岡)