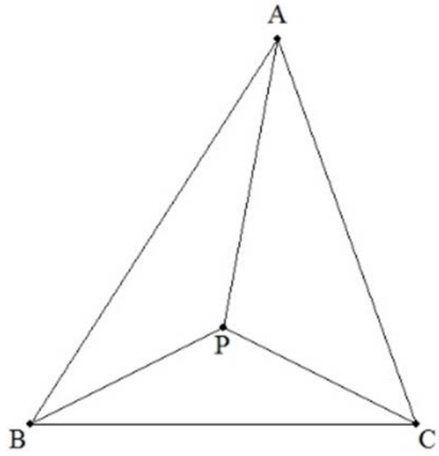
（六斜術）

⊿ABC において任意の１点を P とし，PA= x，PB＝ y，PC＝ z とすれば

$$a^2x^2\left(b^2+c^2+y^2+z^2-a^2-x^2\right)+b^2y^2\left(c^2+a^2+z^2+x^2-b^2-y^2\right)+c^2z^2\left(a^2+b^2+x^2+y^2-c^2-z^2\right)$$
$$=a^2b^2c^2+a^2y^2z^2+b^2z^2x^2+c^2x^2y^2$$

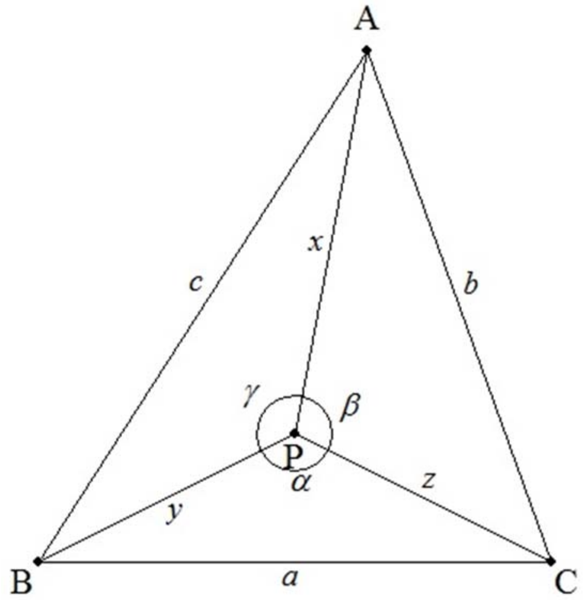


（証明）

∠BPC＝α，∠CPA＝β，∠APB＝γとおき，⊿PBC，⊿PCA，⊿PABに余弦定理を適用すると

$a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha, b^2 = z^2 + x^2 - 2zx\cos\beta, c^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma$ より

$\cos\alpha = \dfrac{y^2 + z^2 - a^2}{2yz}, \cos\beta = \dfrac{z^2 + x^2 - b^2}{2zx}, \cos\gamma = \dfrac{x^2 + y^2 - c^2}{2xy}$ …①



$\alpha + \beta + \gamma = 360°$ であるから

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} + \dfrac{1+\cos 2\beta}{2} + \cos^2\gamma$

$= 1 + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma = 1 + \cos\gamma\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma\cos(\alpha+\beta)$

$= 1 + \cos\gamma\{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\} = 1 + \cos\gamma \cdot 2\cos\alpha\cos\beta$

$= 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

よって　$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$　に①を代入すると

$$\left(\frac{y^2+z^2-a^2}{2yz}\right)^2 + \left(\frac{z^2+x^2-b^2}{2zx}\right)^2 + \left(\frac{x^2+y^2-c^2}{2xy}\right)^2$$

$$= 1 + 2\left(\frac{y^2+z^2-a^2}{2yz}\right)\left(\frac{z^2+x^2-b^2}{2zx}\right)\left(\frac{x^2+y^2-c^2}{2xy}\right) = 1 + \frac{(y^2+z^2-a^2)(z^2+x^2-b^2)(x^2+y^2-c^2)}{4x^2y^2z^2}$$

両辺に$4x^2y^2z^2$を掛けると

$$x^2(y^2+z^2-a^2)^2 + y^2(z^2+x^2-b^2)^2 + z^2(x^2+y^2-c^2)^2 = 4x^2y^2z^2 + (y^2+z^2-a^2)(z^2+x^2-b^2)(x^2+y^2-c^2)$$

ここで，左辺－右辺を計算し，正の項と負の項をまとめると

左辺－右辺

$$= (a^2b^2c^2 + a^2y^2z^2 + b^2z^2x^2 + c^2x^2y^2 + a^4x^2 + a^2x^4 + b^4y^2 + b^2y^4 + c^4z^2 + c^2z^4)$$
$$- (a^2b^2x^2 + a^2c^2x^2 + a^2x^2y^2 + a^2x^2z^2 + b^2c^2y^2 + a^2b^2y^2 + b^2y^2z^2 + b^2x^2y^2$$
$$+ a^2c^2z^2 + b^2c^2z^2 + c^2x^2z^2 + c^2y^2z^2)$$
$$= a^2b^2c^2 + a^2y^2z^2 + b^2z^2x^2 + c^2x^2y^2 + \{a^2x^2(a^2 + x^2) + b^2y^2(b^2 + y^2) + c^2z^2(c^2 + z^2)\}$$
$$- \{a^2x^2(b^2 + c^2 + y^2 + z^2) + b^2y^2(c^2 + a^2 + z^2 + x^2) + c^2z^2(a^2 + b^2 + x^2 + y^2)\}$$
$$= a^2b^2c^2 + a^2y^2z^2 + b^2z^2x^2 + c^2x^2y^2 - a^2x^2(b^2 + c^2 + y^2 + z^2 - a^2 - x^2) - b^2y^2(c^2 + a^2 + z^2 + x^2 - b^2 - y^2)$$
$$- c^2z^2(a^2 + b^2 + x^2 + y^2 - c^2 - z^2)$$
$$= a^2b^2c^2 + a^2y^2z^2 + b^2z^2x^2 + c^2x^2y^2 - \{a^2x^2\left(b^2 + c^2 + y^2 + z^2 - a^2 - x^2\right) + b^2y^2\left(c^2 + a^2 + z^2 + x^2 - b^2 - y^2\right)$$
$$+ c^2z^2\left(a^2 + b^2 + x^2 + y^2 - c^2 - z^2\right)\} = 0$$

であるから

$$a^2x^2\left(b^2 + c^2 + y^2 + z^2 - a^2 - x^2\right) + b^2y^2\left(c^2 + a^2 + z^2 + x^2 - b^2 - y^2\right) + c^2z^2\left(a^2 + b^2 + x^2 + y^2 - c^2 - z^2\right)$$
$$= a^2b^2c^2 + a^2y^2z^2 + b^2z^2x^2 + c^2x^2y^2$$

（終証）

（2011/9/23　時岡）