三角法の公式

1 一般の三角関数

(1) 三角関数の定義

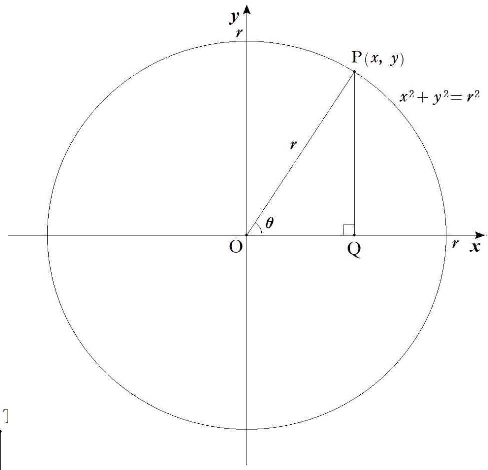
点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は円 $x^2+y^2=r^2$ 上にあり，

$\angle \mathrm{PO}x=\theta$ （動径 OP の表す角）とする。

このとき，

$$\boxed{\sin\theta=\frac{y}{r}\ ,\quad \cos\theta=\frac{x}{r}\ ,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}}$$

で定義する。



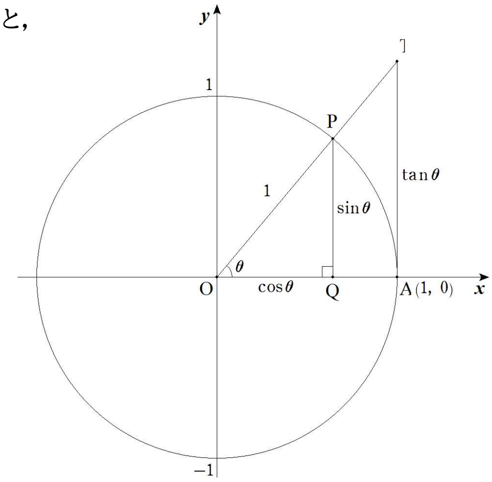
特に，$r=1$ のとき（右図），

A(1, 0) とおき，直線 OP と x 軸の A における垂線との交点をTとすると，

$\sin\theta=y=\mathrm{PQ}$

$\cos\theta=x=\mathrm{OQ}$

$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\mathrm{TA}$



(2) 特殊な角の三角関数の値

θ（度数）	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
θ（弧度）	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

(3) 三角関数の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ ,\quad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\quad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

(4) $\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta\ ,\quad \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta\ ,\quad \tan(\theta+n\pi)=\tan\theta$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta\ ,\quad \cos(-\theta)=\cos\theta\ ,\quad \tan(-\theta)=-\tan\theta$

$$\sin\left(\theta+\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}\cos\theta\ (n=4k+1)\\ -\sin\theta\ (n=4k+2)\\ -\cos\theta\ (n=4k+3)\end{cases},\quad \cos\left(\theta+\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}-\sin\theta\ (n=4k+1)\\ -\cos\theta\ (n=4k+2)\\ \sin\theta\ (n=4k+3)\end{cases}$$

(5) 加法定理

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ （複号同順）

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ （複号同順）

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$ （複号同順）

$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}$$

(6)　2倍角の公式

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta,\quad \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta,\quad \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

(7)　3倍角の公式

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=4\sin\theta\cos(30^\circ+\theta)\cos(30^\circ-\theta)$$

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\cos\theta\sin(30^\circ+\theta)\sin(30^\circ-\theta)$$

$$\tan 3\theta=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\frac{\tan\theta}{\tan(30^\circ+\theta)\tan(30^\circ-\theta)}$$

(8)　半角の公式

$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$　（$\frac{\theta}{2}$が第1，第2象限の角のとき，複号は＋選ぶ。）

$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$　（$\frac{\theta}{2}$が第1，第4象限の角のとき，複号は＋選ぶ。）

$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$　（$\frac{\theta}{2}$が第1，第3象限の角のとき，複号は＋選ぶ。）

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

(9)　和積の公式

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\quad \sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},\quad \cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\tan A+\tan B=(1-\tan A\tan B)\tan(A+B),\quad \tan A-\tan B=(1+\tan A\tan B)\tan(A-B)$$

(10)　積和の公式

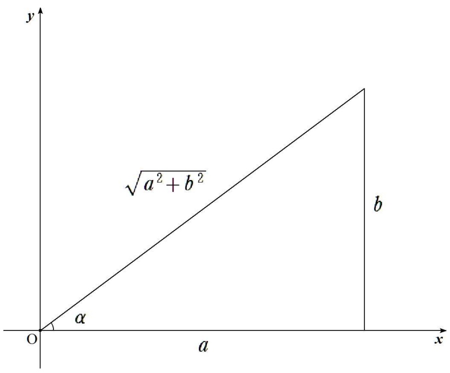
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\},\quad \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\},\quad \sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$$

(11)　三角関数の合成

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$　$\left(\tan\alpha=\frac{b}{a}\right)$



(12)　その他

$\tan\frac{\theta}{2}=t$ とおくと，$\sin\theta=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\boxed{2}$ 三角形ABCにおいて，内角をA，B，C（A+B+C=π），その対辺をa，b，cとし，$a+b+c=2s$，三角形の面積をS，また，外接円の半径をRとする。

(1)　正弦定理　$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

(2) 第１余弦定理　$a=b\cos C+c\cos B$，$b=c\cos A+a\cos C$，$c=a\cos B+b\cos A$

(3) 第２余弦定理

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-4bc\cos^2\frac{A}{2}=(b-c)^2+4bc\sin^2\frac{A}{2}, \quad \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B=(c+a)^2-4ca\cos^2\frac{B}{2}=(c-a)^2+4ca\sin^2\frac{B}{2}, \quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(a+b)^2-4ab\cos^2\frac{C}{2}=(a-b)^2+4ab\sin^2\frac{C}{2}, \quad \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ac}$$

(4) 正接定理

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}}, \text{ 等}$$

(5) $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$，$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$，$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$，等

$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$，$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{s}{4R}$，$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{r}{s}=\frac{S}{s^2}$

(6) $\sin\frac{A}{4}=\sqrt{\frac{\sqrt{bc}-\sqrt{s(s-a)}}{2\sqrt{bc}}}$，$\cos\frac{A}{4}=\sqrt{\frac{\sqrt{bc}+\sqrt{s(s-a)}}{2\sqrt{bc}}}$，$\tan\frac{A}{4}=\frac{\sqrt{bc}-\sqrt{s(s-a)}}{\sqrt{(s-b)(s-c)}}$，等

(7) $\frac{b+c}{a}=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$，$\frac{b-c}{a}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$，等

(8) その他

$\frac{a'}{\cos A}=\frac{b'}{\cos B}=\frac{c'}{\cos C}=2R$（△ABCの垂心をＨとすると，$a'$＝AH，$b'$＝BH，$c'$＝CH）

$$\frac{b^2-c^2}{a\sin(B-C)}=\frac{c^2-a^2}{b\sin(C-A)}=\frac{a^2-b^2}{c\sin(A-B)}=2R$$

$\sin(B-C)=\frac{b^2-c^2}{2aR}$，等

$\cos(B-C)=\frac{a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2}{2a^2bc}$，等

$\cos\frac{B-C}{2}=\sin\frac{A}{2}+2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{b+c}{a}\sin\frac{A}{2}$，等

$\boxed{3}$ 三角形ABCにおいて，内角をA，B，C（A+B+C=π），その対辺を a，b，c とし，$a+b+c=2s$，三角形の面積を S，また，外接円，内接円，∠A内の傍接円，∠B内の傍接円，∠C内の傍接円の半径をそれぞれ R，r，r_a，r_b，r_c とする。

図のように，3辺と内接円の接点をD，E，F，傍接円の接点を D_1，D_2，D_3，E_1，E_2，E_3，F_1，F_2，F_3 とすると，

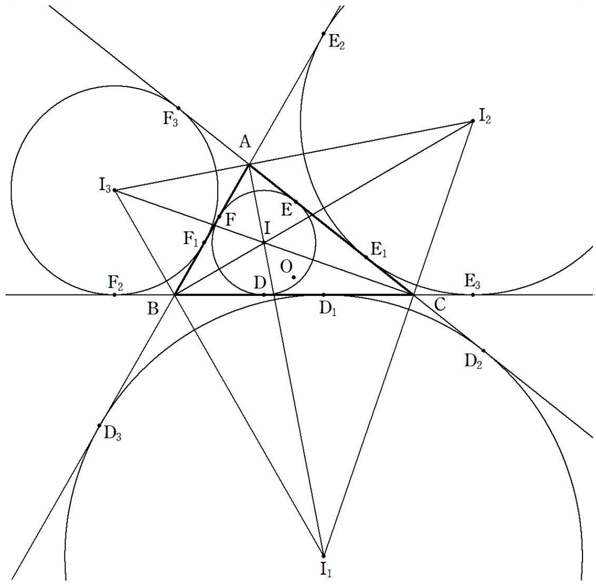
（内接円の接点）

AF=AE= $s-a$，BD=BF= $s-b$，CE=CD= $s-c$

（傍接円の接点）

$BF_1=CE_1=s-a$，$CD_1=AF_1=s-b$，$AE_1=BD_1=s-c$

である。



証明

（内接円の接点）AF= $c-$BF= $c-$BD= $c-(a-$CD$)=c-a+$CE$=c-a+(b-$AE$)=b+c-a-$AF

よって，AF$=\dfrac{b+c-a}{2}=s-a$　他も同様。

（傍接円の接点）$BE_3+BE_2=BC+CE_1+E_1A+AB=BC+CA+AB=2s$

$BE_3=BE_2$ より，$BE_3=s$　よって，$CE_1=CE_3=s-a$　他も同様。

$\boxed{4}$ 面積

(1)　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$，等（2辺夾角）

$\sin A=\dfrac{2S}{bc}$，等

$\tan A=\dfrac{4S}{b^2+c^2-a^2}$，等

(2)　$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（ヘロンの公式）（3辺）

$=\dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}=\dfrac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}$

$(4S)^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^2+b^2+c^2)^2$

(3)　$S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}=\dfrac{a^2\tan B\tan C}{2(\tan B+\tan C)}$（2角夾辺）

(4)　$S=rs$（内接円の半径）

(5)　$S=\dfrac{abc}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$（外接円の半径）

(6)　$S=s^2\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$

(7)　$S=\sqrt{rr_ar_br_c}=r\sqrt{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}$（傍接円の半径）

$\boxed{5}$ 内接円，外接円，傍接円の半径

(1)　$r=\dfrac{S}{s}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=(s-a)\tan\dfrac{A}{2}=4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{a\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}$

(2) $r_a = s\tan\dfrac{A}{2}\ \dfrac{s-b}{\tan\dfrac{C}{2}} = \dfrac{s-c}{\tan\dfrac{B}{2}}\ 4R\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = \dfrac{S}{s-a} = \sqrt{\dfrac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$

(3) $\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{r}$

$\dfrac{r}{r_a} = \dfrac{s-a}{s}$，等

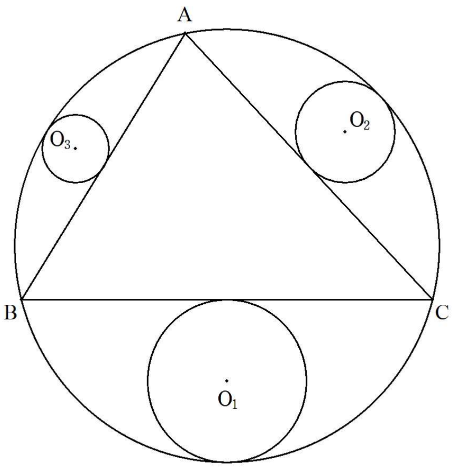
(4) $R+r = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{\tan A}+\dfrac{b}{\tan B}+\dfrac{c}{\tan C}\right) = \dfrac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-a^3-b^3-c^3}{8S}$

$Rr = \dfrac{abc}{4s}$，

$\dfrac{r}{R} = \cos A+\cos B+\cos C-1 = \dfrac{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-a^3-b^3-c^3}{2abc}-1$

$= \dfrac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$

6 (1) △ABCの外接円に内接し，各辺の中点に接する円を$O_1(r_1)$，$O_2(r_2)$，$O_3(r_3)$とする。



$r_1 = \dfrac{a(s-b)(s-c)}{4S} = \dfrac{a}{4}\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$r_2 = \dfrac{(s-a)b(s-c)}{4S} = \dfrac{b}{4}\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$

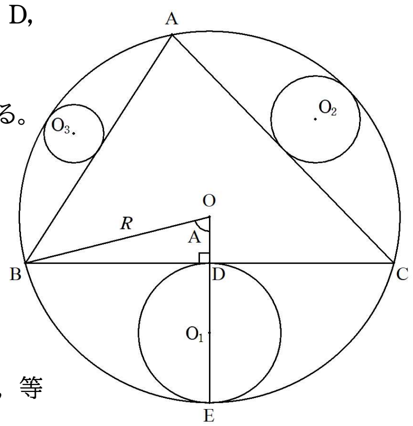
$r_3 = \dfrac{(s-a)(s-b)c}{4S} = \dfrac{c}{4}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

補足 $R = \dfrac{abc}{4S}$と類似している。

(2) △ABCが$b=c$の二等辺三角形のとき，内接円をI(r)とすると，$r:r_2=2a:b$

(3) 内心をIとすると，$r_2r_3 = \dfrac{1}{16}\mathrm{AI}^2$

証明 (1) 外心をO，外接円の半径をRとし，OからBCに下した垂線の足をD，ODの延長と外接円の交点をEとする。



$s=\dfrac{a+b+c}{2}$とおくと，$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（ヘロンの公式）である。

∠BOD=Aであるから，OD= $R\cos A$

$\therefore r_1 = \dfrac{OE-OD}{2} = \dfrac{R-R\cos A}{2} = \dfrac{1}{2}R(1-\cos A)$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{abc}{4S}\left(1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \dfrac{a(a-b+c)(a+b-c)}{16S}$

$= \dfrac{a(s-b)(s-c)}{4S} = \dfrac{a(s-b)(s-c)}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \dfrac{a}{4}\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$，等

(2) $r=\dfrac{S}{s}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$より，$b=c$のとき，$r=\dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{2b-a}{2b+a}}$

また，$b=c$のとき，$r_2=\dfrac{b}{4}\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} = \dfrac{b}{4}\sqrt{\dfrac{2b-a}{2b+a}}$より，$r:r_2=2a:b$ 終

(3) AIとBCの交点をDとすると，

$\mathrm{AI}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\mathrm{AD}=\dfrac{b+c}{a+b+c}\cdot\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}=\dfrac{bc}{s}\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}=\sqrt{\dfrac{bc(s-a)}{s}}$　$\therefore \mathrm{AI}^2=\dfrac{bc(s-a)}{s}$

よって，$r_2r_3=\dfrac{b}{4}\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\cdot\dfrac{c}{4}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}=\dfrac{bc(s-a)}{16s}=\dfrac{1}{16}\mathrm{AI}^2$ 終

7 三角形ABCにおいて，内角をA，B，C（A+B+C=π），その対辺をa，b，cとし，$a+b+c=2s$，三角形の面積をS，また，外接円の半径をRとする。

(1) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{s}{R}$

証明 左辺$=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}=2\sin\dfrac{\pi-C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\sin\dfrac{\pi-(A+B)}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$=2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=2\cos\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos\dfrac{A+B}{2}\right)$

$=2\cos\dfrac{C}{2}\cdot 2\cos\dfrac{A}{2}\cos\left(-\dfrac{B}{2}\right)=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

また，左辺$=\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}+\dfrac{c}{2R}=\dfrac{s}{R}$

よって，$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{s}{R}$ 終

(2) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{s-c}{R}$

証明 左辺$=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}-2\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}=2\sin\dfrac{\pi-C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}-2\sin\dfrac{\pi-(A+B)}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$=2\cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}-2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=2\cos\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2}-\cos\dfrac{A+B}{2}\right)$

$=2\cos\dfrac{C}{2}\cdot(-2)\sin\dfrac{A}{2}\sin\left(-\dfrac{B}{2}\right)=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

また，左辺$=\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}-\dfrac{c}{2R}=\dfrac{s-c}{R}$

よって，$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=\dfrac{s-c}{R}$ 終

(3) $\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}+1=\dfrac{r}{R}+1$

証明 左辺$=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+1-2\sin^2\dfrac{C}{2}=2\cos\dfrac{\pi-C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}-2\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{\pi-(A+B)}{2}+1$

$=2\sin\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2}-\cos\dfrac{A+B}{2}\right)+1=2\sin\dfrac{C}{2}\cdot(-2)\sin\dfrac{A}{2}\sin\left(-\dfrac{B}{2}\right)+1=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}+1$

次に，$\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}=\sqrt{\dfrac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

同様に，$\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}$，$\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

$4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}+1=4\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}+1$

$=\dfrac{4(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}+1=\dfrac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{abcs}+1=\dfrac{4S}{abc}\cdot\dfrac{S}{s}+1=\dfrac{r}{R}+1$

よって，$\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}+1=\dfrac{r}{R}+1$ 終

(4)　$\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}-1=\dfrac{r_3}{R}-1$

証明　左辺$=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}-\left(1-2\sin^2\dfrac{C}{2}\right)=2\cos\dfrac{\pi-C}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+2\sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{\pi-(A+B)}{2}-1$

$=2\sin\dfrac{C}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2}+\cos\dfrac{A+B}{2}\right)-1=2\sin\dfrac{C}{2}\cdot 2\cos\dfrac{A}{2}\cos\left(-\dfrac{B}{2}\right)-1=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}-1$

次に，$\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$，$\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}$，$\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ であるから

$4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}-1=4\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}-1$

$=\dfrac{4s(s-a)(s-b)}{abc}+1=\dfrac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc(s-c)}-1=\dfrac{4S}{abc}\cdot\dfrac{S}{s-c}-1=\dfrac{r_3}{R}-1$

よって，$\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}-1=\dfrac{r_3}{R}-1$　終

(5)　$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C=\dfrac{(4S)^3}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$

鋭角三角形のとき，$\tan A+\tan B+\tan C\geqq 3\sqrt{3}$

証明　$\tan(A+B)=\tan(\pi-C)$ であるから，$\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$

分母を払うと，$\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$

よって，$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

$$\tan A\tan B\tan C=\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}\cdot\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\frac{2S}{bc}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}\cdot\frac{\frac{2S}{ca}}{\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}\cdot\frac{\frac{2S}{ab}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

$$=\frac{(4S)^3}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

よって，$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C=\dfrac{(4S)^3}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$　終

次に，鋭角三角形のとき，$\tan A>0$，$\tan B>0$，$\tan C>0$ であるから，相加平均と相乗平均の関係より

$\tan A+\tan B+\tan C\geqq 3\sqrt[3]{\tan A\tan B\tan C}$　…①

等号が成り立つとき，$\tan A=\tan B=\tan C$，すなわち 正三角形のとき。$\tan A=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

これを①に代入すると，$\tan A+\tan B+\tan C\geqq 3\sqrt{3}$

(6)　$cotA+cotB+cotC=\dfrac{1+\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}\geqq\sqrt{3}$

証明　$\cos(A+B+C)=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C$

$=\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C-\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\sin C=-1$ であるから

$\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\cos C+\sin A\sin B\cos C=1+\cos A\cos B\cos C$

左辺$=\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos C}{\sin C}=\dfrac{\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}$

$=\dfrac{1+\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}$

また，左辺$=\dfrac{\cos A}{\sin A}+\dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos C}{\sin C}=\dfrac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2S}{bc}}+\dfrac{\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{\frac{2S}{ca}}+\dfrac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{2S}{ab}}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

次に，コーシー･シュワルツの不等式より

$(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \geqq (1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c)^2 \quad \therefore a^2+b^2+c^2 \geqq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$ （等号は，$a=b=c$ のとき）

最後に，$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S} \geqq \dfrac{(a+b+c)^2}{3\cdot 4S} = \dfrac{(2s)^2}{3\cdot 4S} = \dfrac{s}{3r} \quad$ …①

相加平均，相乗平均の関係より

$\dfrac{s}{3} = \dfrac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geqq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$ （等号は，$a=b=c$ のとき）

$\left(\dfrac{s}{3}\right)^3 \geqq (s-a)(s-b)(s-c) \quad \dfrac{s^2}{27} \geqq \dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} = r^2 \quad \dfrac{s}{3\sqrt{3}} \geqq r \quad \therefore \dfrac{s}{3r} \geqq \sqrt{3} \quad$ …②

①，②より $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S} \geqq \sqrt{3}$ （等号は，$a=b=c$ のとき）

よって，$\cot A+\cot B+\cot C = \dfrac{1+\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S} \geqq \sqrt{3}$ 終

補足　$\cot A+\cot B+\cot C \geqq \sqrt{3}$ の証明は，(5) と同じように，相加平均と相乗平均の関係を使うと，容易にできる。

(7)　$\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$

証明　7で証明した，$\tan A+\tan B+\tan C = \tan A\tan B\tan C$ の両辺を $\tan A\tan B\tan C$ で割ると得られる。

(8)　$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C = \dfrac{2S}{R^2}$

証明　左辺$= 2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C = 2\sin(\pi-C)\cos(A-B)+2\sin C\cos\{\pi-(A+B)\}$

$= 2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\} = 2\sin C\cdot(-2)\sin A\sin(-B) = 4\sin A\sin B\sin C$

また，$4\sin A\sin B\sin C = 4\cdot\dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{b}{2R}\cdot\dfrac{c}{2R} = \dfrac{2}{R^2}\cdot\dfrac{abc}{4R} = \dfrac{2S}{R^2}$

よって，$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C = \dfrac{2S}{R^2}$ 終

(9)　$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C = -4\cos A\cos B\cos C-1$

証明　左辺$= 2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C-1 = 2\cos(\pi-C)\cos(A-B)+2\cos C\cos\{\pi-(A+B)\}-1$

$= -2\cos C\cos(A-B)-2\cos C\cos(A+B)-1 = -2\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}-1$

$= -2\cos C\cdot 2\cos A\cos(-B)-1 = -4\cos A\cos B\cos C-1$ 終

(10)　$\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2} = 4\sin\dfrac{B+C}{4}\sin\dfrac{C+A}{4}\sin\dfrac{A+B}{4}+1$

証明　左辺$= 2\sin\dfrac{A+B}{4}\cos\dfrac{A-B}{4}+\sin\dfrac{\pi-(A+B)}{2} = 2\sin\dfrac{A+B}{4}\cos\dfrac{A-B}{4}+\cos\dfrac{A+B}{2}$

$= 2\sin\dfrac{A+B}{4}\cos\dfrac{A-B}{4}+1-2\sin^2\dfrac{A+B}{4} = 2\sin\dfrac{A+B}{4}\left(\cos\dfrac{A-B}{4}-\sin\dfrac{A+B}{4}\right)+1$

$= 2\sin\dfrac{A+B}{4}\left\{\cos\dfrac{A-B}{4}-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A+B}{4}\right)\right\}+1 = 2\sin\dfrac{A+B}{4}\cdot(-2)\sin\dfrac{\pi-B}{2}\sin\dfrac{A-\pi}{2}+1$

$= 4\sin\dfrac{B+C}{4}\sin\dfrac{C+A}{4}\sin\dfrac{A+B}{4}+1$ =右辺

$\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2} = 4\sin\dfrac{B+C}{4}\sin\dfrac{C+A}{4}\sin\dfrac{A+B}{4}+1$ 終

(11)　$\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2} = 4\cos\dfrac{B+C}{4}\cos\dfrac{C+A}{4}\cos\dfrac{A+B}{4}$

証明　左辺$= 2\cos\dfrac{A+B}{4}\cos\dfrac{A-B}{4}+\cos\dfrac{\pi-(A+B)}{2} = 2\cos\dfrac{A+B}{4}\cos\dfrac{A-B}{4}+\sin\dfrac{A+B}{2}$

$= 2\cos\dfrac{A+B}{4}\cos\dfrac{A-B}{4}+2\sin\dfrac{A+B}{4}\cos\dfrac{A+B}{4} = 2\cos\dfrac{A+B}{4}\left(\cos\dfrac{A-B}{4}+\sin\dfrac{A+B}{4}\right)$

$= 2\cos\frac{A+B}{4}\left\{\cos\frac{A-B}{4}+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A+B}{4}\right)\right\} = 2\cos\frac{A+B}{4}\cdot 2\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{A-\pi}{4}$

$= 4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}$ =右辺

$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} = 4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}$ 終

(12) $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} = \dfrac{1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \dfrac{4R+r}{s}$

証明 左辺$=\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\dfrac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}+\dfrac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$

$= \dfrac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$ =★

ここで，$1=\sin\frac{A+B+C}{2}=\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$=\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ であるから，

$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

★$=\dfrac{1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$ =中辺$=\dfrac{1+\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}}$

$=\dfrac{abc+(s-a)(s-b)(s-c)}{sS}=\dfrac{abcs+s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2S}=\dfrac{4RSs+S^2}{s^2S}=\dfrac{4Rs+S}{s^2}=\dfrac{4R+r}{s}$ =右辺

よって，$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2} = \dfrac{1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \dfrac{4R+r}{s}$ 終

(13) $cot\frac{A}{2}+cot\frac{B}{2}+cot\frac{C}{2}=cot\frac{A}{2}cot\frac{B}{2}cot\frac{C}{2}=\frac{s}{r}$

証明 $\tan\frac{A+B}{2}=\tan\frac{\pi-C}{2}$ であるから，$\dfrac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}=\dfrac{1}{\tan\frac{C}{2}}$

分母を払い移項すると，$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1$

両辺を $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$ で割ると，$cot\frac{A}{2}+cot\frac{B}{2}+cot\frac{C}{2}=cot\frac{A}{2}cot\frac{B}{2}cot\frac{C}{2}$

次に，$cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$ ，$cot\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-c)(s-a)}}$ ，$cot\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$ であるから

$cot\frac{A}{2}cot\frac{B}{2}cot\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-c)(s-a)}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}=\sqrt{\frac{s^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

$=\frac{s^2}{S}=\frac{s}{r}$

よって，$cot\frac{A}{2}+cot\frac{B}{2}+cot\frac{C}{2}=cot\frac{A}{2}cot\frac{B}{2}cot\frac{C}{2}=\frac{s}{r}$　終

(14)　$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$

証明　左辺$=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-4\cos A\cos B\cos C-1)=2(1+\cos A\cos B\cos C)=$右辺

よって，$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$　終

(15)　$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

証明　左辺$=(1-\sin^2 A)+(1-\sin^2 B)+(1-\cos^2 C)=3-(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)$

$=3-2(1+\cos A\cos B\cos C)=1-2\cos A\cos B\cos C=$右辺

よって，$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$　終

(16)　$\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1-2\sin A\sin B\cos C$

証明　左辺$=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}-\cos^2 C=1+\frac{1}{2}\cdot 2\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos C\{\pi-(A+B)\}$

$=1-\cos C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}=1-\cos C\cdot(-2)\sin A\sin(-B)=1-\sin A\sin B\cos C=$右辺

よって，$\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1-2\sin A\sin B\cos C$　終

(17)　$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=2\left(1+\frac{r}{4R}\right)$

証明　左辺$=\frac{1+\cos A}{2}+\frac{1+\cos B}{2}+\frac{1+\cos C}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1\right))=2\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$

次に，$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R}$ であるから，$2\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=2\left(1+\frac{r}{4R}\right)$

よって，$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=2\left(1+\frac{r}{4R}\right)$　終

(18)　$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r_3}{2R}$

証明　左辺$=\frac{1+\cos A}{2}+\frac{1+\cos B}{2}-\frac{1+\cos C}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos A+\cos B-\cos C)$

$=\frac{1}{2}\left(1+4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1\right)=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$（中辺）

また，$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r_3}{4R}$ であるから，中辺$=2\cdot\frac{r_3}{4R}=\frac{r_3}{2R}=$右辺

よって，$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}=2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{r_3}{2R}$　終

(19)　$\sin A\sin B+\sin B\sin C+\sin C\sin A$

$=2\left(\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$

証明　左辺$=-\frac{1}{2}\{\cos(A+B)-\cos(A-B)\}-\frac{1}{2}\{\cos(B+C)-\cos(B-C)\}-\frac{1}{2}\{\cos(C+A)-\cos(C-A)\}$

$=\frac{1}{2}\{\cos(B-C)+\cos(C-A)+\cos(A-B)\}+\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)=$★

ここで，

前項の｛　｝$=2\cos\frac{B-A}{2}\cos\frac{A+B-2C}{2}+2\cos^2\frac{A-B}{2}-1$

$=2\cos\dfrac{A-B}{2}\left(\cos\dfrac{A+B-2C}{2}+\cos\dfrac{A-B}{2}\right)-1=2\cos\dfrac{A-B}{2}\cdot 2\cos\dfrac{A-C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}-1$

$=4\cos\dfrac{B-C}{2}\cos\dfrac{C-A}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}-1$

後項の( ) $=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}+1$

★$=\dfrac{1}{2}\left(4\cos\dfrac{B-C}{2}\cos\dfrac{C-A}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}-1\right)+\dfrac{1}{2}\left(4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}+1\right)$

$=2\left(\cos\dfrac{B-C}{2}\cos\dfrac{C-A}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\right)$ =右辺 終

(20) $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\dfrac{3A}{2}\cos\dfrac{3B}{2}\cos\dfrac{3C}{2}$

証明 左辺$=2\sin\dfrac{3(A+B)}{2}\cos\dfrac{3(A-B)}{2}+2\sin\dfrac{3C}{2}\cos\dfrac{3C}{2}$

$=2\sin\dfrac{3(\pi-C)}{2}\cos\dfrac{3(A-B)}{2}+2\sin\dfrac{3\{\pi-(A+B)\}}{2}\cos\dfrac{3C}{2}$

$=-2\cos\dfrac{3C}{2}\cos\dfrac{3(A-B)}{2}-2\cos\dfrac{3(A+B)}{2}\cos\dfrac{3C}{2}$

$=-2\cos\dfrac{3C}{2}\left\{\cos\dfrac{3(A-B)}{2}+\cos\dfrac{3(A+B)}{2}\right\}=-2\cos\dfrac{3C}{2}\cdot 2\cos\dfrac{3A}{2}\cos\left(-\dfrac{3B}{2}\right)$

$=-4\cos\dfrac{3A}{2}\cos\dfrac{3B}{2}\cos\dfrac{3C}{2}$

よって， $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\dfrac{3A}{2}\cos\dfrac{3B}{2}\cos\dfrac{3C}{2}$ 終

(21) $\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C=3\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}+\cos\dfrac{3A}{2}\cos\dfrac{3B}{2}\cos\dfrac{3C}{2}$

証明 $\sin 3\theta=3\sin\theta-\sin^3\theta$ より， $\sin^3\theta=\dfrac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{4}$ であるから，

左辺$=\dfrac{3\sin A-\sin 3A}{4}+\dfrac{3\sin B-\sin 3B}{4}+\dfrac{3\sin C-\sin 3C}{4}$

$=\dfrac{3}{4}(\sin A+\sin B+\sin C)-\dfrac{1}{4}(\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C)=$■

ここで，

前項の( ) $=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

後項の( ) $=2\sin\dfrac{3(A+B)}{2}\cos\dfrac{3(A-B)}{2}+2\sin\dfrac{3C}{2}\cos\dfrac{3C}{2}$

$=2\sin\dfrac{3(\pi-C)}{2}\cos\dfrac{3(A-B)}{2}+2\sin\dfrac{3\{\pi-(A+B)\}}{2}\cos\dfrac{3C}{2}$ =★

ここで， $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\dfrac{3\theta}{2}$ であるから

★$=-2\cos\dfrac{3C}{2}\cos\dfrac{3(A-B)}{2}-2\cos\dfrac{3(A+B)}{2}\cos\dfrac{3C}{2}=-2\cos\dfrac{3C}{2}\left\{\cos\dfrac{3(A-B)}{2}+\cos\dfrac{3(A+B)}{2}\right\}$

$=-2\cos\dfrac{3C}{2}\cdot 2\cos\dfrac{3A}{2}\cos\left(-\dfrac{3B}{2}\right)=-4\cos\dfrac{3A}{2}\cos\dfrac{3B}{2}\cos\dfrac{3C}{2}$

■$=3\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}+\cos\dfrac{3A}{2}\cos\dfrac{3B}{2}\cos\dfrac{3C}{2}$ =右辺 終

(22) $\sin^3 A\sin(B-C)+\sin^3 B\sin(C-A)+\sin^3 C\sin(A-B)=0$

証明 まず，$\sin^3 A\sin(B-C)=\dfrac{3\sin A-\sin 3A}{4}\cdot\sin(B-C)$

$=\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\{\cos(A+B-C)-\cos(A-B+C)\}-\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)\{\cos(3A+B-C)-\cos(3A-B+C)\}$

$=-\dfrac{3}{8}\{\cos(\pi-2C)-\cos(\pi-2B)\}+\dfrac{1}{8}\{\cos(\pi+2A-2C)-\cos(\pi+2A-2B)\}$

$=\dfrac{3}{8}(\cos 2C-\cos 2B)-\dfrac{1}{8}\{\cos 2(C-A)-\cos 2(A-B)\}$

同様に，

$\sin^3 B\sin(C-A)=\dfrac{3}{8}(\cos 2A-\cos 2C)-\dfrac{1}{8}\{\cos 2(A-B)-\cos 2(B-C)\}$

$\sin^3 C\sin(A-B)=\dfrac{3}{8}(\cos 2B-\cos 2A)-\dfrac{1}{8}\{\cos 2(B-C)-\cos 2(C-A)\}$

これら３式を辺々加えると，左辺＝0

よって，$\sin^3 A\sin(B-C)+\sin^3 B\sin(C-A)+\sin^3 C\sin(A-B)=0$ 終

(23) $\sin^3 A\cos(B-C)+\sin^3 B\cos(C-A)+\sin^3 C\cos(A-B)=3\sin A\ \sin B\sin C=\dfrac{3S}{2R^2}$

証明 まず，$\sin^3 A\cos(B-C)=\dfrac{3\sin A-\sin 3A}{4}\cdot\cos(B-C)$

$=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\{\sin(A+B-C)+\sin(A-B+C)\}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\{\sin(3A+B-C)+\sin(3A-B+C)\}$

$=\dfrac{3}{8}\{\sin(\pi-2C)+\sin(\pi-2B)\}-\dfrac{1}{8}\{\sin(\pi+2A-2C)+\sin(\pi+2A-2B)\}$

$=\dfrac{3}{8}(\sin 2B+\sin 2C)-\dfrac{1}{8}\{\sin 2(C-A)-\sin 2(A-B)\}$

同様に，

$\sin^3 B\cos(C-A)=\dfrac{3}{8}(\sin 2C+\sin 2A)-\dfrac{1}{8}\{\sin 2(A-B)-\sin 2(B-C)\}$

$\sin^3 C\cos(A-B)=\dfrac{3}{8}(\sin 2A+\sin 2B)-\dfrac{1}{8}\{\sin 2(B-C)-\sin 2(C-A)\}$

これら３式を辺々加えると，

$\sin^3 A\cos(B-C)+\sin^3 B\cos(C-A)+\sin^3 C\cos(A-B)$

$=\dfrac{3}{4}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=\dfrac{3}{4}\cdot 4\sin A\sin B\sin C=3\sin A\sin B\sin C$ 終

(24) $\sin B\sin C\sin(B-C)+\sin C\sin A\sin(C-A)+\sin A\sin B\sin(A-B)$
$=-\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)$

証明 まず，$\sin B\sin C\sin(B-C)=-\dfrac{1}{2}\{\cos(B+C)-\cos(B-C)\}\sin(B-C)$

$=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\{\sin 2B-\sin 2C-\sin 2(B-C)\}=\dfrac{1}{4}\{\sin 2(B-C)-\sin 2B+\sin 2C\}$ …①

同様に，$\sin C\sin A\sin(C-A)=\dfrac{1}{4}\{\sin 2(C-A)-\sin 2C+\sin 2A\}$ …②

$\sin A\sin B\sin(A-B)=\dfrac{1}{4}\{\sin 2(A-B)-\sin 2A+\sin 2B\}$ …③

①，②，③を辺々加えると，

$\sin B\sin C\sin(B-C)+\sin C\sin A\sin(C-A)+\sin A\sin B\sin(A-B)$

$=\dfrac{1}{4}\{\sin 2(B-C)+\sin 2(C-A)+\sin 2(A-B)\}$

$=\frac{1}{4}\{2\sin(B-A)\cos(B-2C+A)+2\sin(A-B)\cos(A-B)\}$

$=\frac{1}{4}\cdot(-2)\sin(A-B)\{\cos(B-2C+A)-\cos(A-B)\}=-\frac{1}{2}\sin(A-B)\cdot(-2)\sin 2(B-C)\sin 2(A-C)$

$=-\sin(B-C)\sin(C-A)\sin(A-B)$ 終

(25) $\sin^4 A+\sin^4 B+\sin^4 C=2(\sin^2 B\sin^2 C+\sin^2 C\sin^2 A+\sin^2 A\sin^2 B)-4\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$

証明 まず，$\sin^4 A=(\sin^2 A)^2=\left(\frac{1-\cos 2A}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1-2\cos 2A+\cos^2 2A)$

$=\frac{1}{4}\left(1-2\cos 2A+\frac{1+\cos 4A}{2}\right)=\frac{1}{8}(3-4\cos 2A+\cos 4A)$ であるから

左辺$=\frac{1}{8}(3-4\cos 2A+\cos 4A)+\frac{1}{8}(3-4\cos 2B+\cos 4B)+\frac{1}{8}(3-4\cos 2C+\cos 4C)$

$=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)+\frac{1}{8}(\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C)$

ここで，$\cos 4A+\cos 4B+\cos 4C=2\cos 2(A+B)\cos 2(A-B)+2\cos^2 2C-1$

$=2\cos 2(\pi-C)\cos 2(A-B)+2\cos 2C\cos 2\{\pi-(A+B)\}-1$

$=2\cos 2C\cos 2(A-B)+2\cos 2C\cos 2(A+B)-1=2\cos 2C\{\cos 2(A-B)+\cos 2(A+B)\}-1$

$=2\cos 2C\cdot\cos 2A\cdot 2\cos(-2B)-1=4\cos 2A\cos 2B\cos 2C-1$ であるから，

左辺$=\frac{9}{8}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)+\frac{1}{8}(4\cos 2A\cos 2B\cos 2C-1)$

$=1-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)+\frac{1}{2}\cos 2A\cos 2B\cos 2C$

次に，$\sin^2 B\sin^2 C=\frac{1-\cos 2B}{2}\cdot\frac{1-\cos 2C}{2}=\frac{1}{4}\{1-(\cos 2B+\cos 2C)+\cos 2B\cos 2C\}$，

$\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C=\frac{1-\cos 2A}{2}\cdot\frac{1-\cos 2B}{2}\cdot\frac{1-\cos 2C}{2}$ 左辺$=\frac{1}{8}\{1-(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)$

$+\cos 2B\cos 2C+\cos 2C\cos 2A+\cos 2A\cos 2B-\cos 2A\cos 2B\cos 2C\}$ であるから，

右辺$=2\left[\frac{1}{4}\{1-(\cos 2B+\cos 2C)+\cos 2B\cos 2C\}+\frac{1}{4}\{1-(\cos 2C+\cos 2A)+\cos 2C\cos 2A\}+\frac{1}{4}\{1-(\cos 2A\right.$

$\left.+\cos 2B)+\cos 2A\cos 2B\}\right]-4\cdot$

$\frac{1}{8}\{1-(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)+\cos 2B\cos 2C+\cos 2C\cos 2A+\cos 2A\cos 2B-\cos 2A\cos 2B\cos 2C\}$

$=1-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)+\frac{1}{2}\cos 2A\cos 2B\cos 2C$

よって，

$\sin^4 A+\sin^4 B+\sin^4 C=2(\sin^2 B\sin^2 C+\sin^2 C\sin^2 A+\sin^2 A\sin^2 B)-4\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C$ 終

8 (1) $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ のとき，

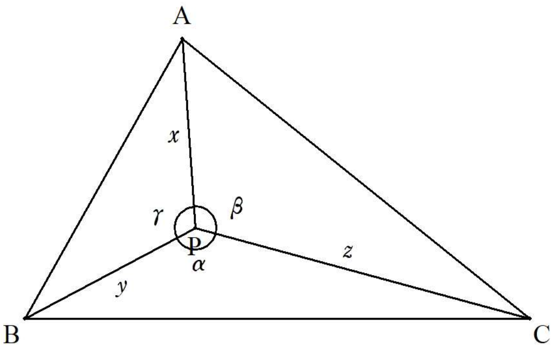
① $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=0$

② △ABCと点Pについて，

AP$=x$，BP$=y$，CP$=z$，

∠BPC$=\alpha$，∠CPA$=\beta$，∠APB$=\gamma$ とおくと，

①と，$\cos\alpha=\dfrac{y^2+z^2-a^2}{2yz}$，等により，



$$x^2(y^2+z^2-a^2)^2+y^2(z^2+x^2-b^2)^2+z^2(x^2+y^2-c^2)-(y^2+z^2-a^2)(z^2+x^2-b^2)(x^2+y^2-c^2)-4x^2y^2z^2=0$$

（六斜術と同値）

(2) $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ のとき，

① $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=0$

② $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$

(3) $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$cot\alpha+cot\beta+cot\gamma=cot\alpha\, cot\beta\, cot\gamma$

9 その他

(1) $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{2S}{R}$

(2) $\cos A+\cos B\cos C=\sin B\sin C=\dfrac{S}{aR}$，等

$$2a^2(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$$
$$=2b^2(c^2+a^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)$$
$$=2c^2(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$$
$$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4=(4S)^2$$

(3) $b\cos B+c\cos C-a\cos B\cos C=\dfrac{S}{R}$，等

(4) $$\frac{(2r\sin A-a\cos B)^2+(2r+2r\cos A-a\sin B)^2}{a^2}$$
$$=\frac{(2r\sin B-b\cos C)^2+(2r+2r\cos B-b\sin C)^2}{b^2}$$
$$=\frac{(2r\sin C-c\cos A)^2+(2r+2r\cos C-c\sin A)^2}{c^2}=\frac{R-2r}{R}$$

(5) $a(s-a)+(s-b)(s-c)=b(s-b)+(s-c)(s-a)=c(s-c)+(s-a)(s-b)$

$=r(r+4R)=\dfrac{1}{4}(2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2)=bc+ca+ab-s^2$

(6) $a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab=3s^2-r(r+4R)$

(7) $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-a^3-b^3-c^3=8(R+r)S=2abc\left(\dfrac{r}{R}+1\right)$

(8) $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ を３辺にもつ三角形の面積は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{r(r+4R)}$

（2012/6/13 初稿，2022/9/4　時岡）