

三角関数に関する計算問題

$\triangle ABC$ について、 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ のとき、

問題 1~30 について、それぞれの値を求めよ。

ただし、

$\triangle ABC$ の外心、内心、重心、垂心を

それぞれ O , I , G , H とする。

AI と BC の交点を L , AI と外接円の

交点を A' とする。

内接円と BC , CA , AB との接点を

それぞれ T_A , T_B , T_C とする。

AT_A , BT_B , CT_C は 1 点 J で交わる。

(Gergonne 点)

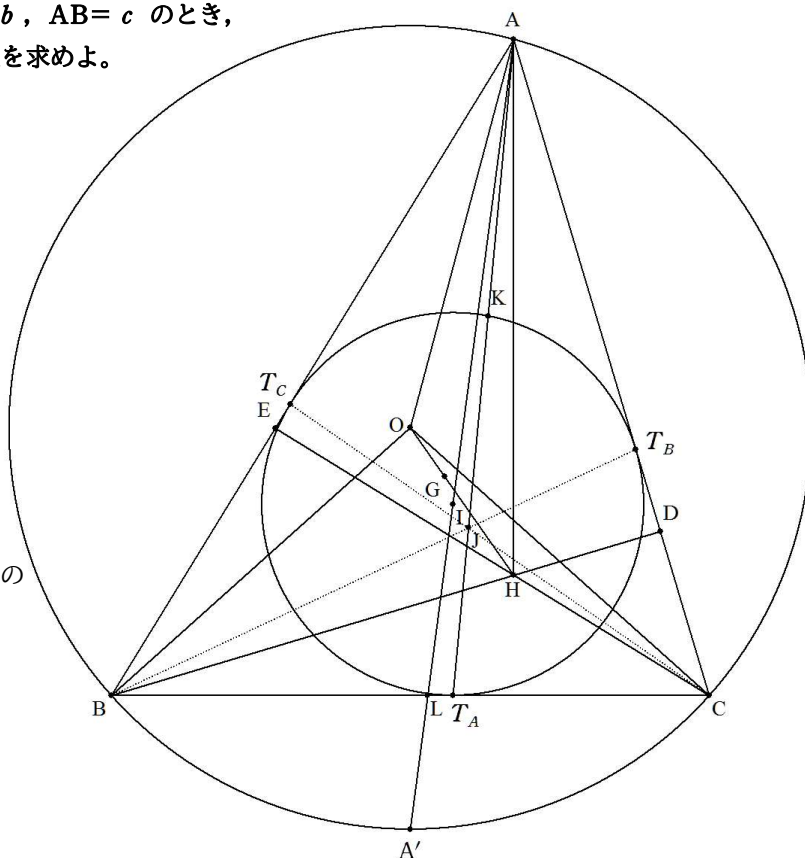
直線 AT_A と内接円の T_A 以外の交点を

K とする。

$\triangle ABC$ の面積、外接円の半径、内接円の

半径をそれぞれ S , R , r とする。

また、問題 31~34 の問いに答えよ。



1. $\cos A$
2. S
3. R
4. r
5. AH
6. AG
7. OA
8. AL
9. AI
10. OH
11. OG
12. $A'C$
13. $A'I$
14. $AI \cdot A'I$
15. OI^2
16. AA'
17. BT_A
18. AT_A
19. AJ

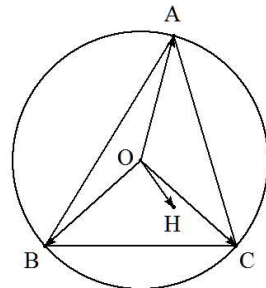
20. AK

21. 辺 BC 上に点 R を固定し, $AR = x$ とおく。辺 AB 上に動点 P, 辺 AC 上に動点 Q をとるとき, $RP + PQ + QR$ を最小にする点 P, Q を求め, そのときの $RP + PQ + QR$ の値を求めよ。

22. 辺 BC 上に動点 R, 辺 AB 上に動点 P, 辺 AC 上に動点 Q をとるとき, $RP + PQ + QR$ を最小にする点 P, Q を求め, そのときの $RP + PQ + QR$ の値を求めよ。

23. $\triangle ABC$ 内部に点 X をとるとき, $AX + BX + CX$ を最小にする点 X を求め, そのときの $AX + BX + CX$ の値を求めよ。

24. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \overrightarrow{OH}|$

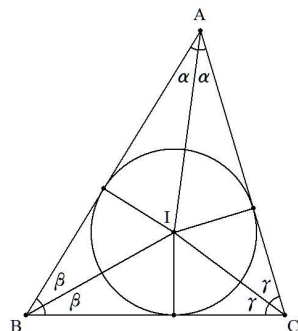


25. $|\vec{a}|$

26. $\vec{a} \cdot \vec{b}$

27. $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$

28. $\alpha = \frac{A}{2}$ のとき, $\tan \alpha$



29. $\cos \alpha$

30. $\sin \alpha$

31. $\triangle ABC$ の外心, 内心, 垂心, $\angle A$ 内の傍心をそれぞれ O, I, H, I_1 とする。6 点 B, O, H, C, I_1 が同一円周上にあるとき, A を求めよ。

32. $\triangle ABC$ の外心, 内心をそれぞれ O, I とする。3 辺 AB, BC, CA が等差数列をなすとき, $\angle AIO$ を求めよ。

33. $\triangle ABC$ において, 次の場合の $\angle A$ の大きさを求めよ。ただし, $m > n > 0$ とする。

(1) $a = m^2 - mn + n^2$, $b = 2mn - n^2$, $c = m^2 - n^2$

(2) $a = m^2 + mn + n^2$, $b = 2mn + n^2$, $c = m^2 - n^2$

34. 円に内接する四角形 ABCD ($AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$) の面積 S を求めよ。

三角関数に関する計算問題

$\triangle ABC$ について、 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ のとき、

問題 1~30 について、それぞれの値を求めよ。

ただし、

$\triangle ABC$ の外心、内心、重心、垂心を

それぞれ O , I , G , H とする。

AI と BC の交点を L , AI と外接円の

交点を A' とする。

内接円と BC , CA , AB との接点を

それぞれ T_A , T_B , T_C とする。

AT_A , BT_B , CT_C は 1 点 J で交わる。

(Gergonne 点)

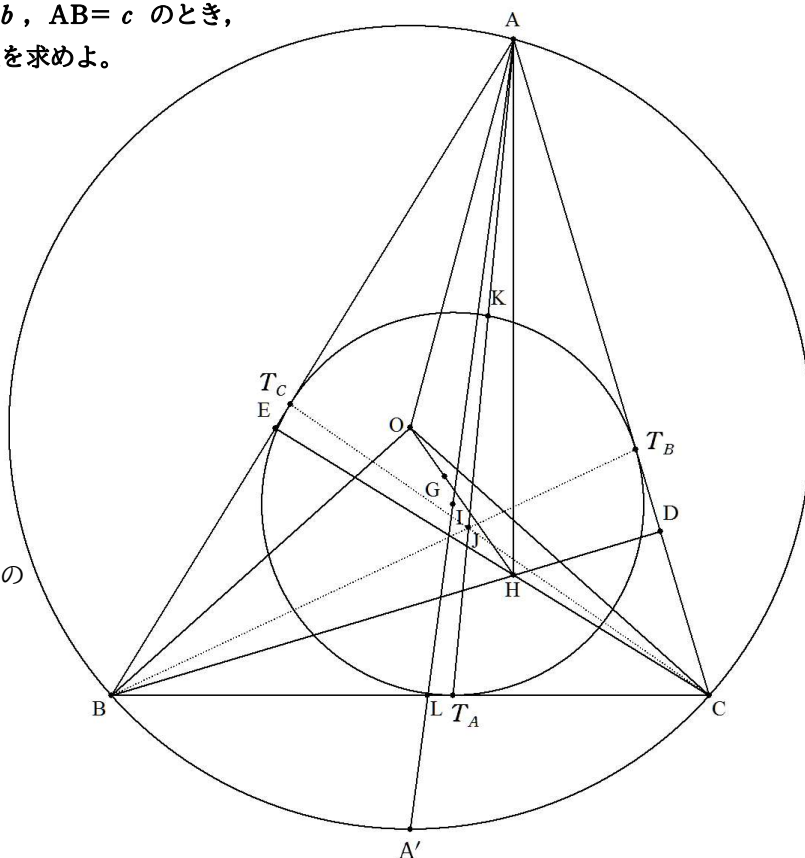
直線 AT_A と内接円の T_A 以外の交点を

K とする。

$\triangle ABC$ の面積、外接円の半径、内接円の

半径をそれぞれ S , R , r とする。

また、問題 31~34 の問いに答えよ。



1. $\cos A$

〔解答〕 余弦定理より、 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 〔答〕

〔証明〕 B から CA に下した垂線の足を D とおき、 $AD=x$ とおくと、 $CD=b-x$ 。

$\triangle BCD$, $\triangle BAD$ に三平方の定理を適用すると、

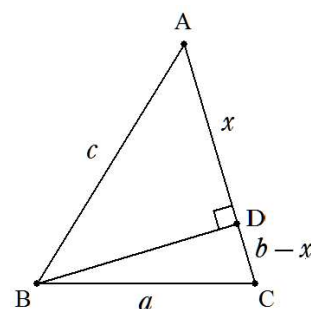
$$BC^2 - CD^2 = BA^2 - AD^2 \text{ より、 } a^2 - (b-x)^2 = c^2 - x^2 \quad \therefore x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$$

$$\cos A = \frac{x}{c} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{〔終〕}$$

〔別解〕 第 1 余弦定理より、 $a = c \cos B + b \cos C$, $b = a \cos C + c \cos A$, $c = b \cos A + a \cos B$

これらを連立させて $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ について解くと、

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



2. S

$$\begin{aligned}
 \text{[解答]} \quad S &= \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{1}{2}bc\sqrt{(1+\cos A)(1-\cos A)} \\
 &= \frac{1}{2}bc\sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}} \\
 &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}
 \end{aligned}$$

ここで, $\frac{a+b+c}{2}=s$ とおくと

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{ヘロンの公式}) \quad \text{[答]}$$

$$\text{[補足]} \quad 4S = \sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

3. R

$$\text{[解答]} \quad S = \frac{1}{2}bc\sin A \quad \text{より} \quad \sin A = \frac{2S}{bc} \quad \text{であるから, 正弦定理} \quad 2R = \frac{a}{\sin A} \quad \text{より,}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{2 \cdot \frac{2S}{bc}} = \frac{abc}{4S} \quad \text{[答]}$$

4. r

[解答] $\triangle ABC$ の内心を I とすると, $\triangle ABC = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$ であるから,

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{a+b+c}{2}r = rs \quad \text{より,} \quad r = \frac{S}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \quad \text{[答]}$$

5. AH

[解答] 外心を O とし, CO の延長と外接円との交点を N とすると,

四角形 ANBH は平行四辺形となるから,

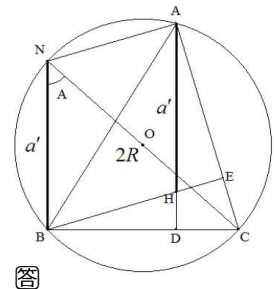
$$AH = NB = 2R\cos A = 2 \cdot \frac{abc}{4S} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{4S} \quad \text{[答]}$$

[別解] 頂点 A, B から対辺に下した垂線の足をそれぞれ D, E とする。

$\triangle AHE \sim \triangle ACD$ より, $AH : AC = AE : AD$

$$\therefore AH = \frac{AC \cdot AE}{AD} = \frac{b \cdot c \cos A}{b \cos C} = 2R \cos A = 2 \cdot \frac{abc}{4S} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{4S} \quad \text{[答]}$$

$$\text{[補足]} \quad AH = a', \quad BH = b', \quad CH = c' \quad \text{とおくと,} \quad \frac{a'}{\cos A} = \frac{b'}{\cos B} = \frac{c'}{\cos C} = 2R$$



6. AG

解答 AGとBCの交点をMとおくと、中線定理により、 $2\left\{AM^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right\} = b^2 + c^2$

$$AM > 0 \text{ より } AM = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2} = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{3} \quad \text{答}$$

補足

中線定理 (パップスの定理)

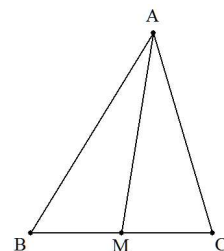
$$\triangle ABC \text{ の } BC \text{ の中点を } M \text{ とすると, } 2(AM^2 + BM^2) = AB^2 + AC^2$$

証明 $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$ であるから, $\cos \angle AMB + \cos \angle AMC = 0$

$$\text{余弦定理を適用して, } \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - c^2}{2 \cdot \frac{a}{2} AM} + \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 - b^2}{2 \cdot \frac{a}{2} AM} = 0$$

$$\text{分母を払って, } \frac{a^2}{2} + 2AM^2 = c^2 + b^2$$

$$a = 2BM \text{ を代入すると, } 2(AM^2 + BM^2) = AB^2 + AC^2 \quad \text{終}$$



7. OA

解答 問題3より, $OA = R = \frac{abc}{4S}$ 答

8. AL

〔解答〕 $BL:LC=m:n$ のとき、スチュアートの定理 $(m+n)(AL^2+BL \cdot LC)=nAB^2+mAC^2$ より

$$AL^2 = \frac{nAB^2+mAC^2}{m+n} - BL \cdot LC = \frac{bc^2+cb^2}{c+b} - \frac{ca}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c} = \frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2} = \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}$$

$$AL>0 \text{ より } AL = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c} \quad \text{〔答〕}$$

〔補足〕 AL が角の二等分線であるとき、 $BL=a_1$ 、 $LC=a_2$ とおくと、 $AL=\sqrt{bc-a_1a_2}$

〔証明〕 AL の延長と $\triangle ABC$ の外接円の交点を A' 、 $AL=x$ 、 $AA'=y$ とおく。

$\triangle ABL \sim \triangle AA'C$ より、 $c:x=y:b \quad \therefore xy=bc$

方べきの定理より、 $a_1a_2=x(y-x)=x^2-xy=x^2-bc \quad \therefore x^2=bc-a_1a_2$

$x>0$ より $x=\sqrt{bc-a_1a_2}$ 〔終〕

〔別解〕 $\triangle ABL + \triangle ACL = \triangle ABC$ より

$$\frac{1}{2}cAL\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bAL\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc \cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} \text{ より,}$$

$$AL = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

$$\text{ここで, } \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \text{ であるから}$$

$$AL = \frac{2bc}{b+c}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c} \quad \text{〔答〕}$$

〔補足〕 スチュアートの定理

$\triangle ABC$ の BC 上の点を M とし、 $BM=x$ 、 $CM=y$ 、 $AM=m$ 、 $AB=c$ 、 $AC=b$ とおくと、

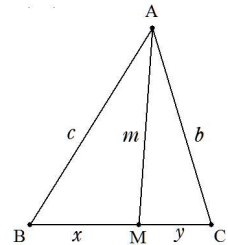
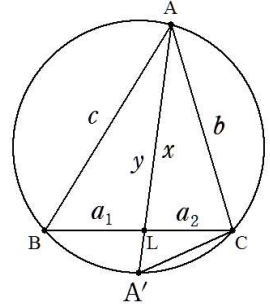
$$(x+y)(m^2+xy)=xb^2+yc^2$$

〔証明〕 $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$ であるから、 $\cos\angle AMB + \cos\angle AMC = 0$

$$\text{余弦定理を適用して, } \frac{x^2+m^2-c^2}{2xm} + \frac{y^2+m^2-b^2}{2ym} = 0$$

$$\text{分母を払って, } y(x^2+m^2-c^2) + x(y^2+m^2-b^2) = 0$$

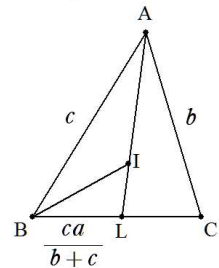
$$(x+y)m^2 + xy(x+y) = xb^2 + yc^2 \quad \therefore (x+y)(m^2+xy) = xb^2 + yc^2 \quad \text{〔終〕}$$



9. AI

〔解答〕 AI と BC の交点を L とすると、 $AI:IL=BA:BL$ より、

$$AI = \frac{c}{c + \frac{ca}{b+c}} AL = \frac{b+c}{a+b+c} AL = \frac{b+c}{a+b+c} \cdot \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c} = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{a+b+c} \quad \text{〔答〕}$$



10. OH

〔解答〕 A, O から BC に下した垂線の足をそれぞれ D, M とし, H から OM に下した垂線の足を E とする。

$$\begin{aligned} OE &= OM - HD = OM - (AD - AH) = R \cos A - (b \sin C - 2R \cos A) \\ &= 3R \cos A - b \sin C \end{aligned}$$

$$EH = MC - DC = \frac{a}{2} - b \sin C$$

直角三角形 OEH に三平方の定理を適用すると, $OH^2 = OE^2 + EH^2$

$$\begin{aligned} OH^2 &= (3R \cos A - b \sin C)^2 + \left(\frac{a}{2} - b \cos C\right)^2 \\ &= 9R^2 \cos^2 A - 6R \cos A \cdot b \sin C + b^2 \sin^2 C + \frac{a^2}{4} - ab \cos C + b^2 \cos^2 C \\ &= 9 \left(\frac{abc}{4S}\right)^2 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 - 6 \cdot \frac{abc}{4S} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{2S}{a} + b^2 + \frac{a^2}{4} - ab \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{9a^2(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4(4S)^2} - \frac{3(b^2 + c^2 - a^2)}{2} + b^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = \frac{9a^2(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4(4S)^2} + \frac{5a^2 - 4b^2 - 4c^2}{4} \\ &= \frac{9a^2(b^2 + c^2 - a^2)^2 + (5a^2 - 4b^2 - 4c^2)(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4)}{4(4S)^2} \\ &= \frac{a^6 + b^6 + c^6 - \Sigma a^4b^2 + 3a^2b^2c^2}{(4S)^2} \quad (\text{ここで, } \Sigma a^4b^2 = a^4b^2 + a^2b^4 + b^4c^2 + b^2c^4 + c^4a^2 + c^2a^4) \\ &= \frac{a^2b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{(4S)^2} = \frac{a^2b^2c^2 - (2bc \cos A)(2ca \cos B)(2ab \cos C)}{(4S)^2} \\ &= \frac{a^2b^2c^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C)}{(4S)^2} = R^2(1 - 8 \cos A \cos B \cos C) \end{aligned}$$

OH > 0 より, $OH = R\sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C}$ 〔答〕

ただし, $R = \frac{abc}{4S}$, $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

〔別解〕 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とすると, 問題 24, 27 より,

$$OH = |\overrightarrow{OH}| = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = R\sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C} \quad \text{〔答〕}$$

11. OG

$$\text{〔解答〕 } OG = \frac{1}{3} OH = \frac{R}{3} \sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C} \quad \text{〔答〕}$$

〔定理〕 $\triangle ABC$ の垂心 H, 重心 G, 外心 O は 1 直線上にあり, $HG = 2GO$ である。

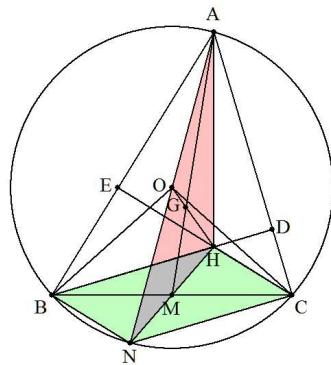
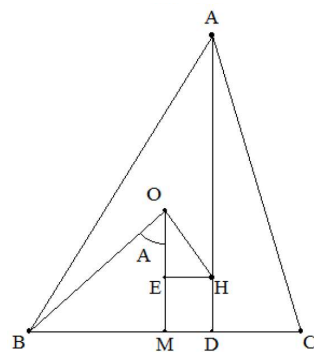
〔証明〕 頂点 B, C から対辺に下した垂線の足をそれぞれ D, E, BC の中点を M, $\triangle ABC$ の外接円と AO の交点を N とする。

四角形 BNCH は平行四辺形となり, M は BC の中点であるから, HN の中点である。

$\triangle HAN$ において, G は OH, AM の交点であるから重心である。

AM は $\triangle ABC$ の中線で $AG : GM = 2 : 1$ であるから, G は $\triangle ABC$ の重心と一致する。

よって, $\triangle ABC$ の垂心 H と重心 G と外心 O は 1 直線 (オイラー線) 上にあり, $HG = 2GO$ である。〔終〕



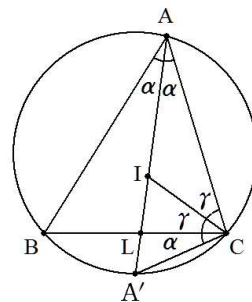
12. A'C

〔解答〕 $\alpha = \frac{A}{2}$ とおく。△AA'Cに正弦定理を適用して、

$$A'C = 2R \sin \alpha = \frac{R \sin A}{\cos \alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha}$$

問題8より、 $\cos \alpha = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ であるから

$$A'C = \frac{a}{2 \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}} = \frac{a \sqrt{bc}}{2 \sqrt{s(s-a)}} \quad \text{答}$$



13. A'I

〔解答〕 $\gamma = \frac{C}{2}$ とおくと、 $\angle A'CI = \alpha + \gamma = \angle A'IC \therefore A'I = A'C = \frac{a \sqrt{bc}}{2 \sqrt{s(s-a)}} \quad \text{答}$

14. AI · A'I

〔解答〕 問題9と13より、 $AI \cdot A'I = \frac{2 \sqrt{bcs(s-a)}}{a+b+c} \cdot \frac{a \sqrt{bc}}{2 \sqrt{s(s-a)}} = \frac{abc}{a+b+c} \quad \text{答}$

15. OI²

〔解答〕 方べきの定理により $AI \cdot A'I = (R+OI)(R-OI) = R^2 - OI^2$

$$\begin{aligned} OI^2 &= R^2 - AI \cdot A'I = \left(\frac{abc}{4S} \right)^2 - \frac{abc}{a+b+c} = \frac{abc \{ abc(a+b+c) - (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4) \}}{(a+b+c)(4S)^2} \\ &= \frac{abc \{ a^4 - a^2(2b^2 - bc + 2c^2) + abc(a+b+c) + (b^2 - c^2)^2 \}}{(a+b+c)(4S)^2} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{〔別解〕} \quad \text{オイラー・チャップルの定理により} \quad OI^2 &= R^2 - AI \cdot A'I = \left(\frac{abc}{4S} \right)^2 - 2 \cdot \frac{abc}{4S} \cdot \frac{S}{s} = \frac{a^2b^2c^2}{(4S)^2} - \frac{abc}{a+b+c} \\ &= \frac{abc \{ abc(a+b+c) - (2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4) \}}{(a+b+c)(4S)^2} \quad \text{答} \end{aligned}$$

〔定理〕 オイラー・チャップルの定理

△ABCの外心、内心をそれぞれO、I、外接円、内接円の半径をそれぞれR、rとすると、

$$OI^2 = R(R-2r)$$

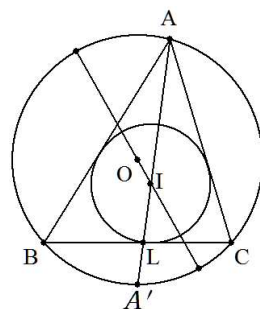
〔証明〕 AIと外接円の交点をA'とすると、方べきの定理により

$$AI \cdot A'I = (R+OI)(R-OI) = R^2 - OI^2$$

$$\text{また、} AI \cdot A'I = AI \sin \alpha \cdot \frac{A'C}{\sin \alpha} = r \cdot 2R = 2Rr$$

$$\therefore OI^2 = R^2 - AI \cdot A'I = R^2 - 2Rr = R(R-2r) \quad \text{終}$$

〔補足〕 $OI^2 = R(R-2r) \geq 0$ より $R \geq 2r$ (等号は正三角形の場合)



16. AA'

解答 $AA' = AI + A'I = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{a+b+c} + \frac{a\sqrt{bc}}{2\sqrt{s(s-a)}} = \frac{(b+c)\sqrt{bc}}{2\sqrt{s(s-a)}}$ 答

補足 $AA' = \frac{b+c}{2\cos\frac{A}{2}}$ と変形できる。また、問題8の結果と合わせて、 $AL \cdot AA' = bc$

別解 問題8より、 $AL = \frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}$ であるから、

$\triangle ABL \sim \triangle AA'C$ より、 $AB : AA' = AL : AC \therefore AA' = \frac{AC \cdot AB}{AL} = \frac{bc}{\frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}} = \frac{(b+c)\sqrt{bc}}{2\sqrt{s(s-a)}}$ 答

別解 四角形 $ABA'C$ にトレミーの定理を適用すると、 $AA' \times BC = AB \times A'C + AC \times A'B$ であるから

$AA' = \frac{AB \cdot A'C + AC \cdot A'B}{BC} = \frac{c \cdot \frac{a\sqrt{bc}}{2\sqrt{s(s-a)}} + b \cdot \frac{a\sqrt{bc}}{2\sqrt{s(s-a)}}}{a} = \frac{(b+c)\sqrt{bc}}{2\sqrt{s(s-a)}}$ 答

補足 トレミーの定理 円に内接する四角形 $ABCD$ について、 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ が成り立つ。

証明 BD 上に点 E を $\triangle ADC \sim \triangle AEB$ となるようにとると、

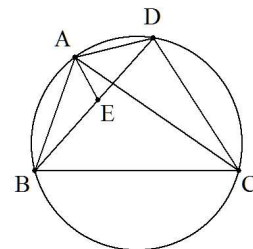
$AC : AB = CD : BE \therefore AB \cdot CD = AC \cdot BE \dots ①$

また、 $\angle EAD = \angle BAC$, $\angle ADB = \angle ACB$ より、 $\triangle AED \sim \triangle ABC$ であるから、

$AD : AC = ED : BC \therefore AD \cdot BC = AC \cdot ED \dots ②$

①+②より、 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BE + AC \cdot ED = AC \cdot (BE + ED) = AC \cdot BD$

よって、 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ 終



17. BT_A

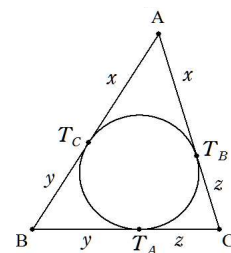
解答 $BT_A = s - b$ 答

補足 $AT_B = AT_C = x$, $BT_C = BT_A = y$, $CT_A = CT_B = z$ とおくと、

$y + z = a$, $z + x = b$, $x + y = c$

この3式を辺々加え、2で割ると、 $x + y + z = \frac{a+b+c}{2} = s$

よって、 $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$



18. AT_A

解答 スチュアートの定理により $\{(s-b) + (s-c)\} \{AT_A^2 + (s-b)(s-c)\} = (s-b)b^2 + (s-c)c^2$

$AT_A^2 = \frac{(s-b)b^2 + (s-c)c^2 - a(s-b)(s-c)}{a} = \frac{(s-a)\{as - (b-c)^2\}}{a}$

$AT_A > 0$ より、 $AT_A = \sqrt{\frac{(s-a)\{as - (b-c)^2\}}{a}}$ 答

19. AJ

解答 $\frac{AT_C}{T_CB} \cdot \frac{BT_A}{T_AC} \cdot \frac{CT_B}{T_BA} = \frac{s-a}{s-b} \cdot \frac{s-b}{s-c} \cdot \frac{s-c}{s-a} = 1$, チェバの定理の逆により, AT_A, BT_B, CT_C は1点で交わる。

$\triangle AT_C C$ と直線 BT_B にメネラウスの定理を適用して,

$$1 = \frac{AJ}{JT_A} \cdot \frac{T_AB}{BC} \cdot \frac{CT_B}{T_BA} = \frac{AJ}{JT_A} \cdot \frac{s-b}{a} \cdot \frac{s-c}{s-a} \quad \therefore \frac{AJ}{JT_A} = \frac{a(s-a)}{(s-b)(s-c)}$$

$$AJ = \frac{AJ}{AT_A} \cdot AT_A = \frac{a(s-a)}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \sqrt{\frac{(s-a)\{as-(b-c)^2\}}{a}}$$

$$= \frac{(s-a)\sqrt{a(s-a)\{as-(b-c)^2\}}}{a(s-a) + (s-b)(s-c)} \quad \text{答}$$

補足 $a(s-a) + (s-b)(s-c) = ab + bc + ca - s^2$ (a, b, c についての対称式)

20. AK

解答 方べきの定理により $AK \cdot AT_A = AT_C^2$

$$AK = \frac{AT_C^2}{AT_A} = \frac{(s-a)^2}{\sqrt{\frac{(s-a)\{as-(b-c)^2\}}{a}}} = (s-a) \sqrt{\frac{a(s-a)}{as-(b-c)^2}} \quad \text{答}$$

21. 辺 BC 上に点 R を固定し, $AR = x$ とおく。辺 AB 上に動点 P , 辺 AC 上に動点 Q をとるとき, $RP + PQ + QR$ を最小にする点 P, Q を求め, そのときの $RP + PQ + QR$ の値を求めよ。

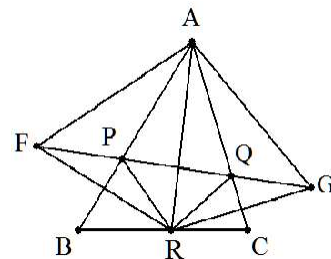
解答 R の AB, AC に関する対称点をそれぞれ F, G とし, FG と AB, AC の交点をそれぞれ P, Q とすると,

$RP + PQ + QR = FP + PQ + QG = FG$ (直線) が最小となる。

$AF = AG = AR = x$ であるから, $\triangle AFG$ に余弦定理を適用して,

$$FG = \sqrt{AF^2 + AG^2 - 2AF \cdot AG \cos 2A} = \sqrt{2x^2(1 - \cos 2A)}$$

$$= \sqrt{2x^2 \cdot 2\sin^2 A} = 2x \sin A = 2x \cdot \frac{2S}{bc} = \frac{4S}{bc} x \quad \text{答}$$



22. 辺 BC 上に動点 R , 辺 AB 上に動点 P , 辺 AC 上に動点 Q をとるとき, $RP + PQ + QR$ を最小にする点 P, Q を求め, そのときの $RP + PQ + QR$ の値を求めよ。

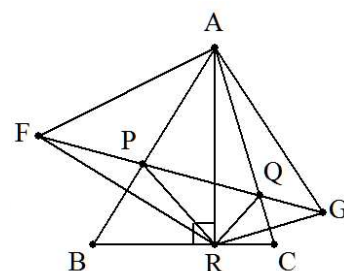
解答 前問より, A から BC に下した垂線の足を R としたとき, 最小となる。

また, R の AB, AC に関する対称点をそれぞれ F, G とし, FG と AB, AC の交点をそれぞれ P, Q とする。

このとき, $RP + PQ + QR = FG$ の値は最小となる。

求める最小値は, $x = AR = c \sin B = \frac{2S}{a}$ のときであるから,

$$FG = \frac{4S}{bc} \cdot \frac{2S}{a} = \frac{2S \cdot 4S}{abc} = \frac{2S}{R} \quad \text{答}$$



23. $\triangle ABC$ 内部に点 X をとるとき, $AX+BX+CX$ を最小にする点 X を求め, そのときの $AX+BX+CX$ の値を求めよ。

$\triangle ABC$ 内に $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA (=120^\circ)$ となる点 F (Fermat点) をとると,

$X=F$ において, $AX+BX+CX$ は最小となる。

D, F', X' を $\triangle BCD, \triangle CFF', \triangle CXX'$ が正三角形になるようにとると,

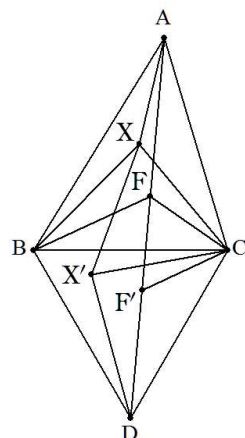
$AX+BX+CX = AX+X'D+XX' \geq AD (=AF+FF'+F'D)$ となるからである。

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad \sin C = \frac{2S}{ab} \quad \text{であるから, } \triangle CAD \text{ に余弦定理を適用すると}$$

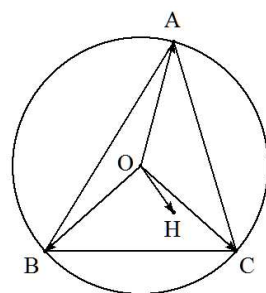
$$AD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(C + 60^\circ) = a^2 + b^2 - 2ab(\cos C \cos 60^\circ - \sin C \sin 60^\circ)$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2S}{ab} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2}$$

$$AD > 0 \text{ より, } AD = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2}} \quad \text{答}$$



24. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \overrightarrow{OH}|$



解答 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OW}$ となる点 W をとると, $\overrightarrow{AW} \cdot \overrightarrow{BC} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = |\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2 = R^2 - R^2 = 0$

$\therefore AW \perp BC$ 同様に, $BW \perp CA$ となるので, W は垂心, すなわち $W=H$

よって, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \overrightarrow{OH}| = |\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OH}| = 0 \quad \text{答}$

別解 問題11で, $OH=3OG$ より, $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \overrightarrow{OH}| = |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3\overrightarrow{OG}| = \left| \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 3 \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \right| = 0 \quad \text{答}$

25. $|\vec{a}|$

解答 問題3より, $|\vec{a}| = R = \frac{abc}{4S} \quad \text{答}$

26. $\vec{a} \cdot \vec{b}$

解答 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB = R^2 \cos 2C = R^2 (2 \cos^2 C - 1) = \left(\frac{abc}{4S} \right)^2 \left\{ 2 \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2 - 1 \right\}$

$$= \frac{c^2 \{ (a^2 + b^2 - c^2) - 2a^2b^2 \}}{2(4S)^2} \quad \text{答}$$

27. $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$

解答 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}) = 3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)$

ここで, $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 2 \cos(A+B) \cos(A-B) + 2 \cos^2 C - 1$

$$= -2 \cos C \cos(A-B) + 2 \cos^2 C - 1 = -2 \cos C \{ \cos(A-B) - \cos C \} - 1$$

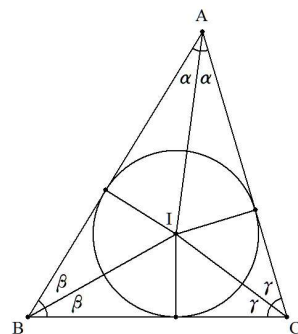
$$= -2 \cos C \{ \cos(A-B) + \cos(A+B) \} - 1 = -2 \cos C \cdot 2 \cos A \cos B - 1 = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C \text{ より}$$

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = R^2 \{ 3 + 2(-1 - 4 \cos A \cos B \cos C) \} = R^2 (1 - 8 \cos A \cos B \cos C)$$

$$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \geq 0 \text{ より, } |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = R \sqrt{1 - 8 \cos A \cos B \cos C} \quad \text{答}$$

補足 問題24より, この値はOHに等しい。(問題10の別解)

28. $\alpha = \frac{A}{2}$ のとき, $\tan \alpha$



【解答】 $\tan \alpha = \frac{r}{s-a} = \frac{\frac{S}{s}}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ 答

【別解】 半角の公式 $\tan \alpha = \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$ を用いても計算できる。

29. $\cos \alpha$

【解答】 $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\cos \alpha > 0$ より, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

【別解】 半角の公式より,

$\cos \alpha = \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ 答

30. $\sin \alpha$

【解答】 $\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ 答

【別解】 半角の公式より,

$\sin \alpha = \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b+c)^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ 答

31. $\triangle ABC$ の外心, 内心, 垂心, $\angle A$ 内の傍心をそれぞれ O, I, H, I_1 とする。6 点 B, O, H, C, I_1 が同一円周上にあるとき, A を求めよ。

【解答】 $\angle BOC = 2A$, $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$, $\angle BHC = 180^\circ - A$, $\angle BI_1C = 90^\circ - \frac{A}{2}$ である。

$\angle BOC = \angle BIC$ とおくと, $2A = 90^\circ + \frac{A}{2}$ より $\therefore A = 60^\circ$

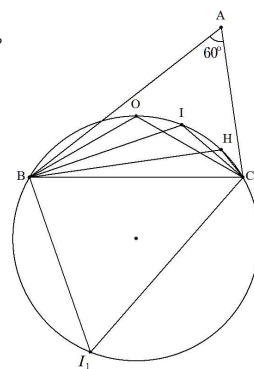
このとき, $\angle BOC = \angle BIC = \angle BHC = 120^\circ$ となり,

5 点 B, O, H, C は同一円周上にある。

また, $\angle BI_1C = 60^\circ$ となり, I_1 は BC に関して A と反対側にあるから

I_1 も同じ円周上にある。

よって, $A = 60^\circ$ 答



32. $\triangle ABC$ の外心, 内心をそれぞれ O, I とする。3 辺 AB, BC, CA が等差数列をなすとき, $\angle AIO$ を求めよ。

〔解答〕 $AB=c, BC=a, CA=b$ とおく,

仮定より, $2a=b+c \dots \textcircled{1}$

AI と外接円の交点を A' とおく。

四角形 $ABA'C$ にトレミーの定理を適用すると,

$$A'B \cdot b + A'C \cdot c = AA' \cdot a$$

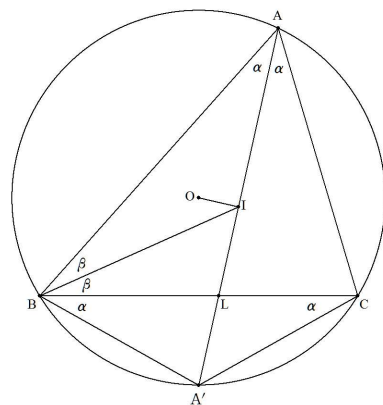
$$A'B = A'C \text{ より, } A'B \cdot (b+c) = AA' \cdot a$$

$$\textcircled{1} \text{ を代入すると, } A'B \cdot 2a = AA' \cdot a \quad \therefore 2A'B = AA'$$

$$\alpha = \frac{A}{2}, \beta = \frac{B}{2} \text{ とおくと, } \angle A'BI = \alpha + \beta = \angle A'TB \text{ より,}$$

$$A'B = A'I \quad \therefore A'I = AI$$

I は AA' の中点となるから, $OI \perp AI$ より, $\angle AIO = 90^\circ$ 〔答〕



33. $\triangle ABC$ において, 次の場合の $\angle A$ の大きさを求めよ。ただし, $m > n > 0$ とする。

$$(1) \quad a = m^2 - mn + n^2, \quad b = 2mn - n^2, \quad c = m^2 - n^2$$

$$(2) \quad a = m^2 + mn + n^2, \quad b = 2mn + n^2, \quad c = m^2 - n^2$$

〔解答〕 (1) 余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(2mn - n^2)^2 + (m^2 - n^2)^2 - (m^2 - mn + n^2)^2}{2(2mn - n^2)(m^2 - n^2)} \\ &= \frac{(2mn - n^2)^2 + (2m^2 - mn)(mn - 2n^2)}{2n(2m - n)(m^2 - n^2)} = \frac{n^2(2m - n)^2 + mn(2m - n)(m - 2n)}{2n(2m - n)(m^2 - n^2)} \\ &= \frac{n(2m - n)\{n(2m - n)m(m - 2n)\}}{2n(2m - n)(m^2 - n^2)} = \frac{n(2m - n)(m^2 - n^2)}{2n(2m - n)(m^2 - n^2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より, $A = 60^\circ$ 〔答〕

〔例〕 $(m, n) = (2, 1)$ のとき, $(a, b, c) = (3, 3, 3)$

$(m, n) = (3, 1)$ のとき, $(a, b, c) = (7, 5, 8) \Rightarrow$ 名古屋

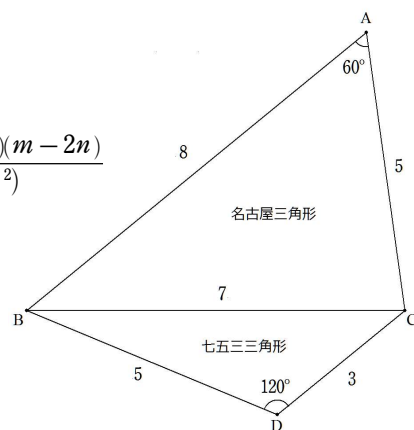
$(m, n) = (4, 1)$ のとき, $(a, b, c) = (13, 7, 15)$

$$\begin{aligned} (2) \quad \text{同様に, } \cos A &= \frac{(2mn + n^2)^2 + (m^2 - n^2)^2 - (m^2 + mn + n^2)^2}{2(2mn + n^2)(m^2 - n^2)} = \frac{n^2(2m + n)^2 + (2m^2 + mn)(-mn - 2n^2)}{2n(2m + n)(m^2 - n^2)} \\ &= \frac{n(2m + n)\{n(2m + n) - m(m + 2n)\}}{2n(2m + n)(m^2 - n^2)} = \frac{-n(2m + n)(m^2 - n^2)}{2n(2m + n)(m^2 - n^2)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より, $A = 120^\circ$ 〔答〕

〔例〕 $(m, n) = (2, 1)$ のとき, $(a, b, c) = (7, 5, 3) \Rightarrow$ 七五三

$(m, n) = (3, 1)$ のとき, $(a, b, c) = (13, 7, 8)$



34. 円に内接する四角形ABCD (AB= a , BC= b , CD= c , DA= d) の面積 S を求めよ。

〔解答〕 $C=180^\circ-A$ より, $\sin C=\sin A$, $\cos C=-\cos A$ である。

$$S=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin A$$

$$\therefore 4S=2(ad+bc)\sin A \quad \dots\textcircled{1}$$

$$BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A \quad \dots\textcircled{2}$$

$$BD^2=b^2+c^2-2bc\cos C=b^2+c^2+2bc\cos A \quad \dots\textcircled{3}$$

$$\textcircled{3}-\textcircled{2}\text{より}, 2(ad+bc)\cos A=(a^2+d^2)-(b^2+c^2) \quad \dots\textcircled{4}$$

①の両辺を2乗すると,

$$(4S)^2=\{2(ad+bc)\}^2\sin^2 A=\{2(ad+bc)\}^2(1-\cos^2 A)$$

$$=\{2(ad+bc)\}^2-\{2(ad+bc)\cos A\}^2=\{2(ad+bc)\}^2-\{a^2+d^2-(b^2+c^2)\}^2 \quad (\because \textcircled{4}\text{を代入した。})$$

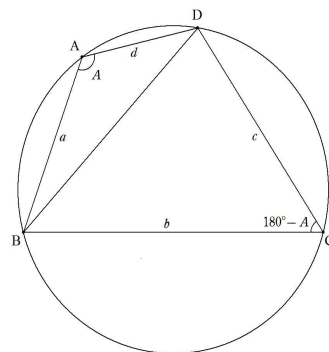
$$=\{2(ad+bc)+a^2+d^2-(b^2+c^2)\}\{2(ad+bc)-(a^2+d^2)+(b^2+c^2)\}$$

$$=\{(a+d)^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-(a-d)^2\}=(a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)$$

ここで, $s=\frac{a+b+c+d}{2}$ とおくと, $a+d+b-c=a+b+c+d-2c=2s-2c=2(s-c)$, 等より

$$(4S)^2=2(s-c)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-d)\cdot 2(s-a)=4^2(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

$$S>0 \text{ より}, \therefore S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad \text{答 (プラマグプダの定理)}$$



(2019/8/26 時岡)