

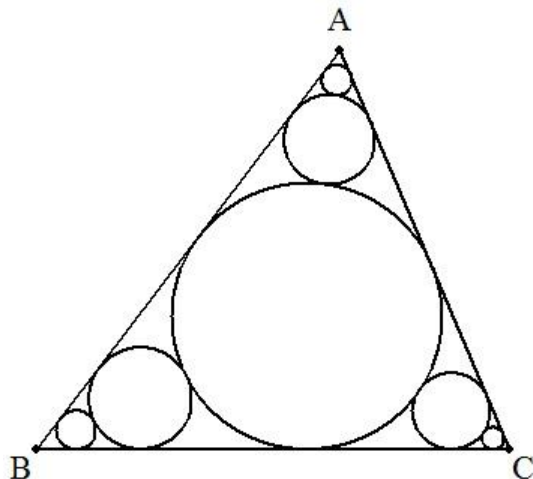
■ 三角形に含まれる連結した無限個の円の面積和

図のように、三角形 ABC の内接円から 3 つの頂点に向かって連結した無限個の三角形の内接円を考える。

$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ のとき、これらすべての円の面積和 S_c は、

$$S_c = \frac{\pi}{4s} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}} \left[\begin{aligned} &\{(s-b)(s-c)+bc\}\sqrt{a(s-a)} \\ &+ \{(s-c)(s-a)+ca\}\sqrt{b(s-b)} \\ &+ \{(s-a)(s-b)+ab\}\sqrt{c(s-c)} \\ &- 2\sqrt{abc(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned} \right]$$

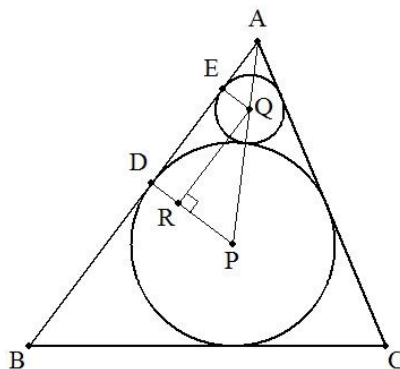
$$\text{ただし, } s = \frac{a+b+c}{2}$$



(証) 三角形の内接円の半径を r , それに外接し, 2 辺 AB , AC に接する円の半径を r_a とすると, 次の図より,

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{PR}{PQ} = \frac{r-r_a}{r+r_a} \text{ であるから}$$

$$\therefore r_a = \frac{1 - \sin \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} r$$



よって半径 r の内接円から頂点 A に向かって連結した無限個の内接円の面積和は,

$$\text{初項 } \pi r^2, \text{ 公比 } \left(\frac{1 - \sin \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} \right)^2 \left(0 < \left(\frac{1 - \sin \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} \right)^2 < 1 \right) \text{ の無限等比級数であるから,}$$

$$\frac{\pi r^2}{1 - \left(\frac{1 - \sin \frac{A}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2}} \right)^2} = \pi r^2 \times \frac{\left(1 + \sin \frac{A}{2} \right)^2}{4 \sin \frac{A}{2}} = \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{A}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \right)$$

同様に, 内接円から頂点 B および C に向かって連結した無限個の内接円の面積和は, それぞれ

$$\frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{B}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} \right), \quad \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{C}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \right)$$

よって, 求める三角形 ABC の内接円から 3 つの頂点に向かって連結した無限個の内接円の面積和 S_c は

$$S_c = \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{A}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \right) + \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{B}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} \right) + \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{C}{2} + 2 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \right) - 2\pi r^2$$

$$= \frac{\pi}{4} r^2 \left(\sin \frac{A}{2} + \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \sin \frac{B}{2} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \sin \frac{C}{2} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} - 2 \right)$$

ここで, $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ 等々, $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ を代入すると,

$$S_c = \frac{\pi}{4s} \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}} \left[\{(s-b)(s-c) + bc\} \sqrt{a(s-a)} + \{(s-c)(s-a) + ca\} \sqrt{b(s-b)} \right. \\ \left. + \{(s-a)(s-b) + ab\} \sqrt{c(s-c)} - 2\sqrt{abc(s-a)(s-b)(s-c)} \right]$$

ただし, $s = \frac{a+b+c}{2}$

(終証)

【例】

a	b	c	S_c と近似値
1	1	1	$\frac{11}{96} \pi (= 0.359974158)$
4	3	5	$\frac{-20 + 15\sqrt{2} + 12\sqrt{5} + 11\sqrt{10}}{40} \pi (= 4.9347392)$
7	5	3	$\frac{-84 + 49\sqrt{3} + 87\sqrt{7} + 31\sqrt{21}}{224} \pi (= 5.661199735)$
12	5	13	$\frac{-52 + 39\sqrt{2} + 17\sqrt{13} + 27\sqrt{26}}{26} \pi (= 24.42252711)$
14	15	13	$\frac{-520 + 312\sqrt{5} + 170\sqrt{13} + 81\sqrt{65}}{65} \pi (= 69.77428001)$

(2012/1/30 時岡)