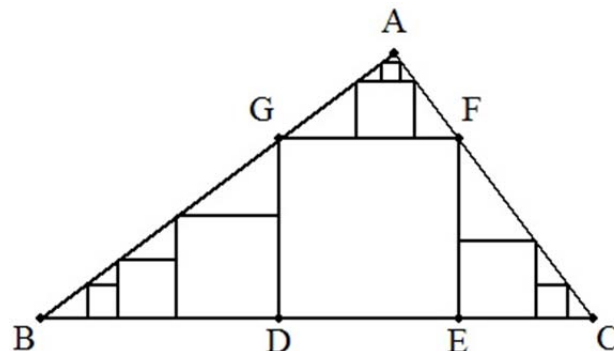


右図のように、 $\angle A=90^\circ$ の直角三角形 ABC に内接する正方形 DEFG に連結する無限個の正方形を考える。

CA = b , AB = c のとき、直角三角形 ABC 内のすべての正方形の面積和を求めよ。



(解) 便宜上、 $BC = a = \sqrt{b^2 + c^2}$ とおく。

A から BC に下ろした垂線の足を H, AH と GF の交点を I とする。

$\triangle ABH \sim \triangle CBA$ より $AH:CA=AB:CB$,

$$AH:b = c:a \quad \therefore AH = \frac{bc}{a}$$

よって、 $BC = a$, $AH = \frac{bc}{a}$ より正方形 DEFG の辺の長さは

$$\frac{BC \times AH}{BC + AH} = \frac{a \times \frac{bc}{a}}{a + \frac{bc}{a}} = \frac{abc}{a^2 + bc}$$

直角三角形 ABC を線分 GD, FE で 3 分割して考える。

- [1] $\triangle GBD$ に含まれるすべての正方形の面積和を S(B)
 - [2] $\triangle FCE$ に含まれるすべての正方形の面積和を S(C)
 - [3] 五角形 AGDEF に含まれるすべての正方形の面積和を S(A)
- とする。

[1] $\triangle GBD \sim \triangle CBA$ より $BD:BA=GD:CA$,

$$BD:c = \frac{abc}{a^2 + bc} : b \quad \therefore BD = \frac{ac^2}{a^2 + bc}$$

$\triangle GBD$ 内の最初の正方形の辺の長さは

$$\frac{BD \times GD}{BD + GD} = \frac{\frac{ac^2}{a^2 + bc} \times \frac{abc}{a^2 + bc}}{\frac{ac^2}{a^2 + bc} + \frac{abc}{a^2 + bc}} = \frac{abc^2}{(b+c)(a^2 + bc)} = \frac{abc}{a^2 + bc} \times \frac{c}{b+c} \quad \dots \textcircled{1}$$

この長さは正方形 DEFG の辺の長さの $\frac{c}{b+c}$ ($0 < \frac{c}{b+c} < 1$) 倍であるから、

以下、正方形の辺の長さは $\frac{c}{b+c}$ 倍ずつ小さくなっていく。

S(B)は無限等比級数で、

初項は $\triangle GBD$ に含まれる最初の正方形の面積で、①より $\left\{ \frac{abc^2}{(b+c)(a^2+bc)} \right\}^2 = \frac{a^2b^2c^4}{(b+c)^2(a^2+bc)^2}$

公比は $\left(\frac{c}{b+c} \right)^2$ であるから

$$S(B) = \frac{a^2b^2c^4}{(b+c)^2(a^2+bc)^2} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{c}{b+c} \right)^2} = \frac{a^2bc^4}{(b+2c)(a^2+bc)^2} \quad \dots \textcircled{2}$$

[2] [1]と同様に

$$S(C) = \frac{a^2b^4c}{(2b+c)(a^2+bc)^2} \quad \dots \textcircled{3}$$

[3] $\triangle AGF \sim \triangle ABC$ より $AI:AH=GF:BC$,

$$AI: \frac{bc}{a} = \frac{abc}{a^2+bc} : a \quad \therefore AI = \frac{b^2c^2}{a(a^2+bc)}$$

$\triangle AGF$ 内の最初の正方形の辺の長さは

$$\frac{GF \times AI}{GF + AI} = \frac{\frac{abc}{a^2+bc} \times \frac{b^2c^2}{a(a^2+bc)}}{\frac{abc}{a^2+bc} + \frac{b^2c^2}{a(a^2+bc)}} = \frac{ab^2c^2}{(a^2+bc)^2} = \frac{abc}{a^2+bc} \times \frac{bc}{a^2+bc}$$

この長さは正方形 $DEFG$ の辺の長さの $\frac{bc}{a^2+bc}$ ($0 < \frac{bc}{a^2+bc} < 1$) 倍であるから、

以下、正方形の辺の長さは $\frac{bc}{a^2+bc}$ 倍ずつ小さくなっていく。

$S(A)$ は無限等比級数で、

$$\text{初項は正方形 } DEFG \text{ の面積で } \left(\frac{abc}{a^2+bc} \right)^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+bc)^2}$$

公比は $\left(\frac{bc}{a^2+bc} \right)^2$ であるから

$$S(A) = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+bc)^2} \times \frac{1}{1 - \left(\frac{bc}{a^2+bc} \right)^2} = \frac{b^2c^2}{a^2+2bc} \quad \dots \textcircled{4}$$

以上、②、③、④より

$$S(A) + S(B) + S(C) = \frac{b^2c^2}{a^2+2bc} + \frac{a^2bc^4}{(b+2c)(a^2+bc)^2} + \frac{a^2b^4c}{(2b+c)(a^2+bc)^2}$$

ここで、 $a^2 = b^2 + c^2$ に注意して整理すると

$$S(A)+S(B)+S(C)=\frac{bc(b^8+6b^7c+15b^6c^2+26b^5c^3+33b^4c^4+26b^3c^5+15b^2c^6+6bc^7+c^8)}{(b+c)^2(b+2c)(2b+c)(b^2+bc+c^2)^2} \quad \dots \text{ (答)}$$

【例】

	b	c	$S(A)+S(B)+S(C)$
1	1	2	$\frac{725}{882}$
2	1	$\sqrt{3}$	$\frac{-2910+3139\sqrt{3}}{3718}$
3	1	3	$\frac{24279}{18928}$
4	2	3	$\frac{610563}{252700}$
5	2	5	$\frac{5629535}{1341522}$
6	3	4	$\frac{3545886}{737891}$
7	5	12	$\frac{121236886830}{4834588231}$

(2011/12/11 時岡)