3 直線でつくられる三角形の面積

互いに平行でない 3 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0, a_2x+b_2y+c_2=0, a_3x+b_3y+c_3=0$ によってつくられる三角形の面積を求めよ。

（解） $a_1x+b_1y+c_1=0\cdots①, a_2x+b_2y+c_2=0\cdots②, a_3x+b_3y+c_3=0\cdots③$ とおく。

①～③はそれぞれ平行でないので，どの 2 直線についても交点はそれぞれ 1 個ずつである。

②，③の交点を (x_1, y_1)，③，①の交点を (x_2, y_2)，①，②の交点を (x_3, y_3) とおくと，行列式を用いて

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}-c_2 & b_2\\ -c_3 & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}}, y_1=\frac{\begin{vmatrix}a_2 & -c_2\\ a_3 & -c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}}, x_2=\frac{\begin{vmatrix}-c_3 & b_3\\ -c_1 & b_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}, y_2=\frac{\begin{vmatrix}a_3 & -c_3\\ a_1 & -c_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}, x_3=\frac{\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}, y_3=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}$$

と表される。

求める三角形の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1-x_3 & y_1-y_3\\ x_2-x_3 & y_2-y_3\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\frac{\begin{vmatrix}-c_2 & b_2\\ -c_3 & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}}-\frac{\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}} & \frac{\begin{vmatrix}a_2 & -c_2\\ a_3 & -c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}}-\frac{\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\\ \frac{\begin{vmatrix}-c_3 & b_3\\ -c_1 & b_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}-\frac{\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}} & \frac{\begin{vmatrix}a_3 & -c_3\\ a_1 & -c_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}-\frac{\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\end{matrix}\right\|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{\begin{vmatrix}-c_2 & b_2\\ -c_3 & b_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}}-\frac{\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\right)\left(\frac{\begin{vmatrix}a_3 & -c_3\\ a_1 & -c_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}-\frac{\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\right)-\left(\frac{\begin{vmatrix}a_2 & -c_2\\ a_3 & -c_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}}-\frac{\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\right)\left(\frac{\begin{vmatrix}-c_3 & b_3\\ -c_1 & b_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}}-\frac{\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}\right)\right|$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}^2}{2\left|\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right|}$$

$$=\frac{\{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\}^2}{2|(a_2b_3-a_3b_2)(a_3b_1-a_1b_3)(a_1b_2-a_2b_1)|}\cdots$$ （答）

（2015/1/14　時岡）