平面に関して対称な点および点と平面の距離

平面 α ： $ax+by+cz+d=0$ に関して，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と対称な点を $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ とすると，

(1)　$x_2=x_1-\dfrac{2a(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$，　$y_2=y_1-\dfrac{2b(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$，　$z_2=z_1-\dfrac{2c(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$

である。

(2)　点 P と平面 α の距離を h とすると，　$h=\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ である。

証明

(1)　2 点 P，Q の中点 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2},\ \dfrac{x_3+y_3}{2}\right)$ は，平面 α 上の点であるから，

$$a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+b\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)+c\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)+d=0 \quad \cdots①$$

直線 PQ の方向ベクトル $(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$ と平面 α の法線ベクトル $(a,\ b,\ c)$ は平行だから，

$(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)=k(a,\ b,\ c)$ となる k が存在する。 $x_2=x_1+ak$ ， $y_2=y_1+bk$ ， $z_2=z_1+ck$　$\cdots$②

②を①に代入すると， $a\left(\dfrac{2x_1+ak}{2}\right)+b\left(\dfrac{2y_1+bk}{2}\right)+c\left(\dfrac{2z_1+ck}{2}\right)+d=0$　$\therefore k=-\dfrac{2(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$

これを②に代入すると，

$x_2=x_1-\dfrac{2a(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$，　$y_2=y_1-\dfrac{2b(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$，　$z_2=z_1-\dfrac{2c(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}$　終

(2)　$h=\dfrac{1}{2}PQ=\dfrac{1}{2}\sqrt{(ak)^2+(bk)^2+(ck)^2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}\left|-\dfrac{2(ax_1+by_1+cz_1+d)}{a^2+b^2+c^2}\right|$

$=\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$　終

（2021/1/27　時岡）