直線に関して対称な点および点と直線の距離

直線 l ： $ax+by+c=0$ に関して，点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と対称な点を $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ とすると，

(1)　$x_2=x_1-\dfrac{2a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$，　$y_2=y_1-\dfrac{2b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$ である。

(2)　点Pと直線 l の距離を d とすると，$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。

証明

(1)　2点P，Qの中点 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ は，直線 l 上の点であるから，$a\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)+b\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)+c=0$

$\therefore ax_2+by_2=-ax_1-by_1-2c$　…①

また，$l\perp \mathrm{PQ}$ であるから，$b(x_2-x_1)-a(y_2-y_1)=0$　$\therefore bx_2-ay_2=bx_1-ay_1$　…②

①× a +②× b より

$(a^2+b^2)x_2=(b^2-a^2)x_1-2aby_1-2ac=(a^2+b^2)x_1-2a(ax_1+by_1+c)$

$\therefore x_2=x_1-\dfrac{2a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$

同様に，①× b −②× a より　$y_2=y_1-\dfrac{2b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$　終

(2)　$d=\dfrac{1}{2}PQ=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left\{x_1-\dfrac{2a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}-x_1\right\}^2+\left\{y_1-\dfrac{2b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}-y_1\right\}^2}$

$=\sqrt{\dfrac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}}=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　終

(2019/8/22　時岡)

証明2

(1)　2点P，Qの中点 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ は，直線 l 上の点であるから，$a\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)+b\left(\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)+c=0$　…①

直線PQの方向ベクトル $(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ と直線 l の法線ベクトル $(a,\ b)$ は平行だから，

$(x_2-x_1,\ y_2-y_1)=k(a,\ b)$ となる k が存在する。$x_2=x_1+ak$，　$y_2=y_1+bk$　…②

②を①に代入すると，$a\left(\dfrac{2x_1+ak}{2}\right)+b\left(\dfrac{2y_1+bk}{2}\right)+c=0$　$\therefore k=-\dfrac{2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$

これを②に代入すると，$x_2=x_1-\dfrac{2a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$，　$y_2=y_1-\dfrac{2b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$　終

(2)　$d=\dfrac{1}{2}PQ=\dfrac{1}{2}\sqrt{(ak)^2+(bk)^2}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\left|-\dfrac{2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}\right|=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$　終

(2021/1/27　時岡)