

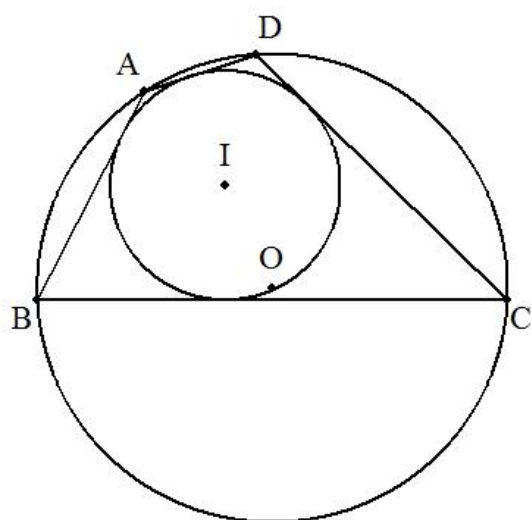
内接円と外接円をもつ四角形について

$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ である四角形 $ABCD$ の外接円を O , 内接円を I とする。

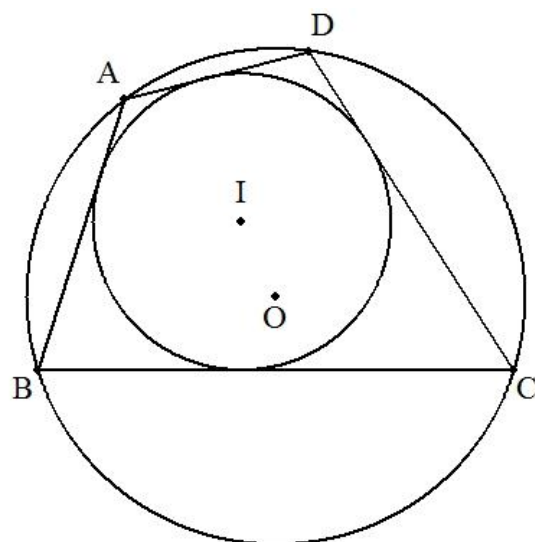
1 四角形 $ABCD$ の面積 S , 内接円の半径 r , 外接円の半径 R

	a	b	c	d	BD	AC	$\cos A$	$\cos B$	S	r	R
①	2	4	3	1	$\sqrt{\frac{55}{7}}$	$2\sqrt{\frac{35}{11}}$	$-\frac{5}{7}$	$\frac{5}{11}$	$2\sqrt{6}$	$\frac{2\sqrt{6}}{5}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{385}{6}} = \frac{\sqrt{2310}}{24}$
②	3	5	4	2	$\sqrt{\frac{253}{13}}$	$2\sqrt{\frac{143}{23}}$	$-\frac{7}{13}$	$\frac{7}{23}$	$2\sqrt{30}$	$\frac{2\sqrt{30}}{7}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3289}{30}} = \frac{\sqrt{98670}}{120}$
③	4	6	5	3	$\sqrt{\frac{247}{7}}$	$2\sqrt{\frac{133}{13}}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{3}{13}$	$6\sqrt{10}$	$\frac{2\sqrt{10}}{3}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1729}{10}} = \frac{\sqrt{17290}}{40}$
④	5	7	6	4	$\sqrt{\frac{1711}{31}}$	$2\sqrt{\frac{899}{59}}$	$-\frac{11}{31}$	$\frac{11}{59}$	$2\sqrt{210}$	$\frac{2\sqrt{210}}{11}$	$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{53041}{210}} = \frac{\sqrt{11138610}}{840}$

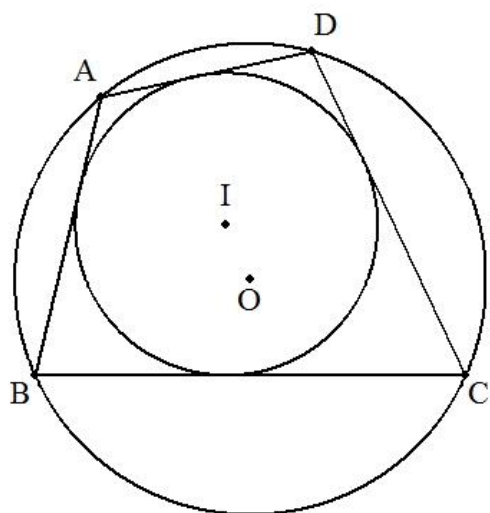
①



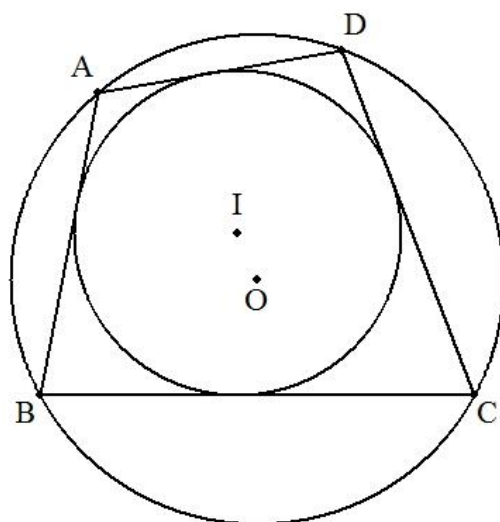
②



③



④



2 四角形 ABCD の外接円の中心を原点に、辺 BC は x 軸に平行に置くとき、各点の座標について

	A	B	C	D	I
①	$\left(-\frac{12}{11}, \frac{181\sqrt{6}}{264}\right)$	$\left(-2, -\frac{\sqrt{6}}{24}\right)$	$\left(2, -\frac{\sqrt{6}}{24}\right)$	$\left(-\frac{1}{7}, \frac{137\sqrt{6}}{168}\right)$	$\left(-\frac{2}{5}, \frac{43\sqrt{6}}{120}\right)$
②	$\left(\frac{73}{46}, \frac{1049\sqrt{30}}{2760}\right)$	$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{17\sqrt{30}}{120}\right)$	$\left(\frac{5}{2}, -\frac{17\sqrt{30}}{120}\right)$	$\left(\frac{9}{26}, \frac{739\sqrt{30}}{1560}\right)$	$\left(-\frac{5}{14}, \frac{121\sqrt{30}}{840}\right)$
③	$\left(-\frac{27}{13}, \frac{419\sqrt{10}}{520}\right)$	$\left(-3, -\frac{17\sqrt{10}}{40}\right)$	$\left(3, -\frac{17\sqrt{10}}{40}\right)$	$\left(\frac{6}{7}, \frac{281\sqrt{10}}{280}\right)$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{29\sqrt{10}}{120}\right)$
④	$\left(-\frac{303}{118}, \frac{10369\sqrt{210}}{49560}\right)$	$\left(-\frac{7}{2}, -\frac{109\sqrt{210}}{840}\right)$	$\left(\frac{7}{2}, -\frac{109\sqrt{210}}{840}\right)$	$\left(\frac{85}{62}, \frac{6701\sqrt{210}}{26040}\right)$	$\left(-\frac{7}{22}, \frac{481\sqrt{210}}{9240}\right)$

(求め方)

BC の中点を E, A から BC, x 軸への垂線の足をそれぞれ F, G, D から BC, x 軸への垂線の足をそれぞれ H, J とする。AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, 外接円の半径 OB = R である。

$$OE = \sqrt{OC^2 - EC^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \text{ であるから, } B\left(-\frac{b}{2}, -\sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right), C\left(\frac{b}{2}, -\sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)$$

$$BF = a \cos B, AF = a \sin B \text{ であるから, } A\left(a \cos B - \frac{b}{2}, a \sin B - \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)$$

$$\text{同様に, } CH = c \cos C = -c \cos A, DH = c \sin C = c \sin A \text{ であるから, } D\left(c \cos A + \frac{b}{2}, c \sin A - \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)$$

I は ∠B と ∠C の二等分線の交点である。

∠B の二等分線の方程式は,

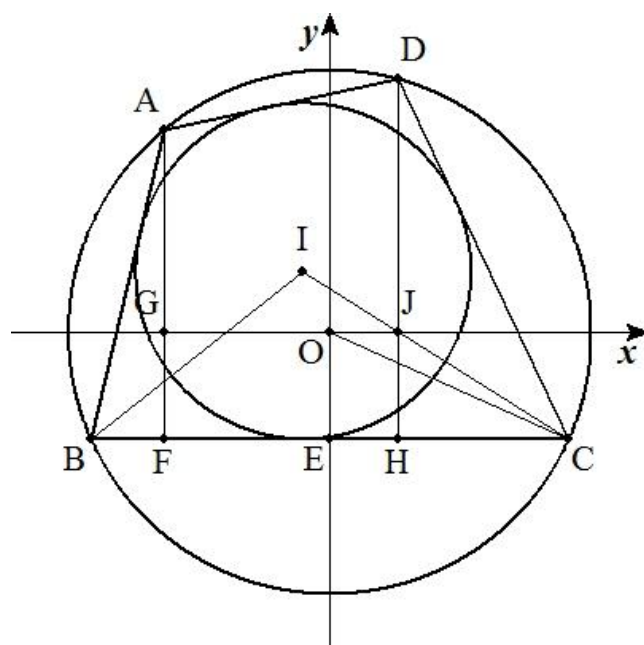
$$y + \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \left(x + \frac{b}{2}\right) \tan \frac{B}{2} \cdots \textcircled{1}$$

∠C の二等分線の方程式は,

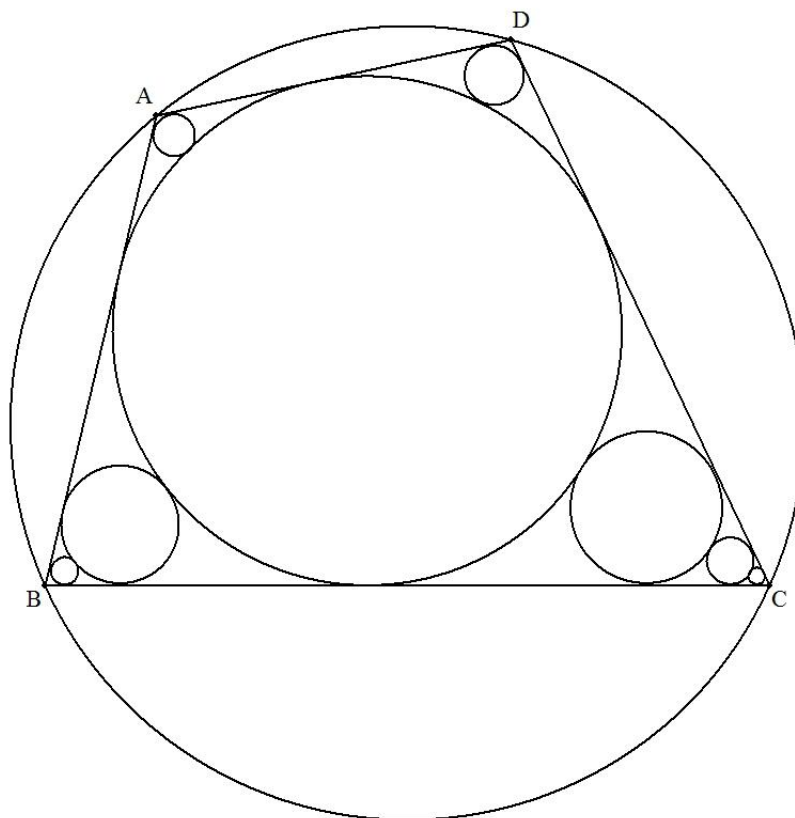
$$y + \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = -\left(x - \frac{b}{2}\right) \tan \frac{C}{2} \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を連立させて,

$$I\left(-\frac{b}{2} \cdot \frac{\tan \frac{B}{2} - \tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}}, \frac{b \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}}{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}} - \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}\right)$$



3 円に内接する四角形ABCDの内接円から4つの頂点に向かって連結した無限個の内接円の面積和 S_C



	S_C	近似値
①	$\frac{(-3696 + 1056\sqrt{7} + 399\sqrt{22} + 392\sqrt{33} + 286\sqrt{42})\pi}{3850}$	4.140986047
②	$\frac{(-71760 + 7360\sqrt{39} + 6045\sqrt{46} + 3174\sqrt{130} + 1976\sqrt{345})\pi}{29302}$	9.444945934
③	$\frac{(-7280 + 1170\sqrt{14} + 735\sqrt{26} + 624\sqrt{35} + 504\sqrt{65})\pi}{1638}$	16.49533725
④	$\frac{(-3072720 + 101598\sqrt{310} + 90055\sqrt{354} + 61360\sqrt{651} + 34968\sqrt{2065})\pi}{442618}$	25.30404916

(2012/1/15 時岡)