

△ABC と五心以外の点 P について、 $\overrightarrow{AP}$ を計算する

時岡郁夫

1. はじめに

BC = a , CA = b , AB = c である△ABC の重心, 垂心, 内心, 外心, ∠A 内の傍心をそれぞれ G, H, I, O, I_1 とし, $s = \frac{a+b+c}{2}$, △ABC = S とおく。このとき, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおくと,

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}, \overrightarrow{AH} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{(4S)^2} \{ (a^2 + b^2 - c^2)\vec{b} + (c^2 + a^2 - b^2)\vec{c} \}, \overrightarrow{AI} = \frac{b\vec{b} + c\vec{c}}{a+b+c},$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{b^2(c^2 + a^2 - b^2)\vec{b} + c^2(a^2 + b^2 - c^2)\vec{c}}{(4S)^2}, \overrightarrow{AI_1} = \frac{b\vec{b} + c\vec{c}}{b+c-a} \text{ となることが知られている。 (参考文献[1])}$$

ただし, $(4S)^2 = 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$ である。

今回は, 次に示す公式を用いて, 五心以外の点 P について, $\overrightarrow{AP}$ を計算する。

- ジェルゴンヌ (Gergonne) 点: 三角形の内接円と辺の接点と頂点をつなぐ 3 直線の交点。
- ナーゲル (Nagel) 点: 三角形の傍接円と辺の接点と頂点をつなぐ 3 直線の交点。
- フェルマー (Fermat) 点: 3 頂点からの距離の和が最小になる点。∠BPC = ∠CPA = ∠APB (3 つの内角はどれも 120° 未満とする。)
- ブロカール (Brocard) 点 (第 1 : ∠PAB = ∠PBC = ∠PCA のとき, 第 2 : ∠PAC = ∠PBA = ∠PCB のとき)
- ルモワヌ (Lemoine) 点 (類似重心): 三角形の角の二等分線に関して中線を折り返した 3 直線の交点。
- キーペルト (Kiepert) 点: △ABC の外側に各辺を底辺とし, 相似な二等辺三角形△A'BC, △B'CA, △C'AB をつくるとき, AA', BB', CC' の交点。二等辺三角形を△ABC の外側につくったときの低角を θ , 内側につくったときの低角を $-\theta$ とし, $d = 4S \cot \theta$ とする。 $\theta = 60^\circ$ のとき, フェルマー点となる。

2. 公式

△ABC と点 P について,

AP と BC の交点を D, BP と CA の交点を E,

BD : DC = $a_1 : a_2$, CE : EA = $b_1 : b_2$,

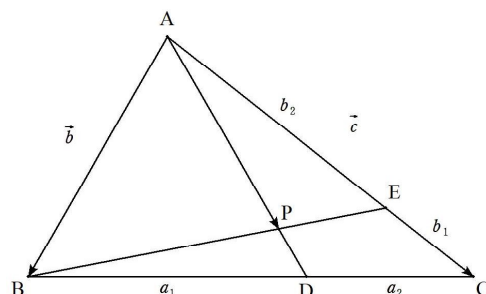
$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおくと,

$$\boxed{\text{公式}} \quad \overrightarrow{AP} = \frac{b_2}{a_1b_1 + (a_1 + a_2)b_2} (a_2\vec{b} + a_1\vec{c})$$

$$\boxed{\text{証明}} \quad \overrightarrow{AD} = \frac{a_2\vec{b} + a_1\vec{c}}{a_1 + a_2} \text{ である。}$$

メネラウスの定理により, $\frac{AP}{PD} \cdot \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = 1$ より, $\frac{AP}{PD} = \frac{(a_1 + a_2)b_2}{a_1b_1}$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{(a_1 + a_2)b_2}{a_1b_1 + (a_1 + a_2)b_2} \overrightarrow{AD} = \frac{(a_1 + a_2)b_2}{a_1b_1 + (a_1 + a_2)b_2} \cdot \frac{a_2\vec{b} + a_1\vec{c}}{a_1 + a_2} = \frac{b_2}{a_1b_1 + (a_1 + a_2)b_2} (a_2\vec{b} + a_1\vec{c}) \quad \boxed{\text{終}}$$



3. 点 P が五心以外の点のとき

(1) 点 P が Gergonne (ジェルゴンヌ) 点のとき

三角形の内接円と辺の接点と頂点をつなぐ 3 直線の交点。

解答 $a_1 = s - b$, $a_2 = b_1 = s - c$, $b_2 = s - a$ を公式に代入すると,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{s - a}{(s - b)(s - c) + a(s - a)} \{ (s - c)\vec{b} + (s - b)\vec{c} \}$$

ここで,

$$a(s-a) + (s-b)(s-c) = a \cdot \frac{a+b+c}{2} + \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = \frac{2bc+2ca+2ab-a^2-b^2-c^2}{4}$$

$$= \frac{4bc+4ca+4ab-(a+b+c)^2}{4} = bc+ca+ab-s^2 \text{ であるから,}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{s-a}{bc+ca+ab-s^2} \{ (s-c)\vec{b} + (s-b)\vec{c} \} \quad \text{答}$$

(2) 点PがNagel (ナーゲル) 点のとき

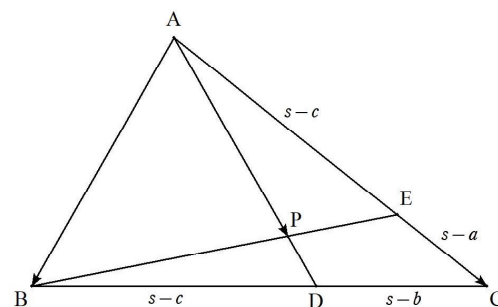
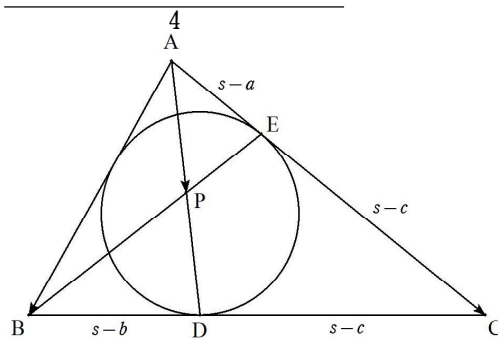
三角形の傍接円と辺の接点をつなぐ3直線の交点。

解答 $a_1=b_2=s-c, \quad a_2=s-b, \quad b_1=s-a$

を公式に代入すると,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{s-c}{(s-c)(s-a)+a(s-c)} \{ (s-b)\vec{b} + (s-c)\vec{c} \}$$

$$= \frac{(s-b)\vec{b} + (s-c)\vec{c}}{s} \quad \text{答}$$



(3) 点PがFermat (フェルマー) 点のとき

3頂点からの距離の和が最小になる点。∠BPC=∠CPA=∠APB (3つの内角はどれも120°未満とする。)

解答

△ABCの外側に正三角形 A'CB, B'AC, C'BA を

つくる。このとき, AA', BB', CC'は1点Pで交

わり, ∠BPC=∠CPA=∠APB=120°となる。(証明略)

AP= x, BP= y, CP= z (x>0, y>0, z>0) と

おく。

△PBC+△PCA+△PAB=△ABC より,

$$\frac{1}{2}(yz+zx+xy)\sin 120^\circ = S$$

$$\therefore yz+zx+xy = \frac{4}{\sqrt{3}}S \quad \dots \textcircled{1}$$

次に, BD:DC= y:z, CE:EA= z:xであるから, 公式により,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{x(z\vec{b} + y\vec{c})}{yz + (y+z)x} = \frac{x(z\vec{b} + y\vec{c})}{yz + zx + xy}$$

$$\textcircled{1} \text{を代入すると, } \overrightarrow{AP} = \frac{x(z\vec{b} + y\vec{c})}{\frac{4}{\sqrt{3}}S} = \frac{\sqrt{3}x(z\vec{b} + y\vec{c})}{4S} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\triangle PBC \text{ に余弦定理を適用すると, } y^2 + z^2 - 2yz\cos 120^\circ = a^2 \quad \therefore y^2 + yz + z^2 = a^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

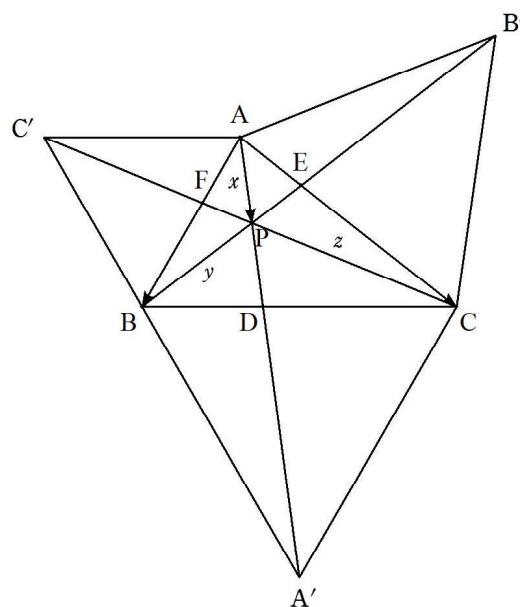
$$\text{同様に, } \triangle PCA, \triangle PAB \text{ から, } z^2 + zx + x^2 = b^2 \quad \dots \textcircled{4}, \quad x^2 + xy + y^2 = c^2 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5} \text{ より, } 2(x^2 + y^2 + z^2) + (yz + zx + xy) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{変形すると, } 2(x+y+z)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 3(yz + zx + xy)$$

$$\text{これに} \textcircled{2} \text{を代入して, } x+y+z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S}{2}} = k \quad \dots \textcircled{6} \text{とおく。}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \text{ より, } (y-x)(x+y+z) = a^2 - b^2 \quad \therefore y = x + \frac{a^2 - b^2}{k} \quad \dots \textcircled{7}$$



$$\textcircled{3}-\textcircled{5} \text{より, } (z-x)(x+y+z)=a^2-c^2 \quad \therefore z=x+\frac{a^2-c^2}{k} \quad \dots\textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{を}\textcircled{6} \text{に代入すると, } x+x+\frac{a^2-b^2}{k}+x+\frac{a^2-c^2}{k}=k$$

$$3x=k+\frac{b^2+c^2-2a^2}{k} \quad \therefore x=\frac{k^2+b^2+c^2-2a^2}{3k}$$

$$\text{左辺の分子に}\textcircled{6} \text{を代入すると, } x=\frac{\frac{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S}{2}+b^2+c^2-2a^2}{3k}=\frac{b^2+c^2-a^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}$$

$$\text{同様に, } y=\frac{c^2+a^2-b^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}, \quad z=\frac{a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k} \text{ となる。}$$

これら3式を②に代入して,

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\sqrt{3} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k}}{4S} \left\{ \frac{a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k} \vec{b} + \frac{c^2+a^2-b^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{2k} \vec{c} \right\}$$

さらに⑥を代入して,

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\sqrt{3}}{8S} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S}{a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S} \left\{ \left(a^2+b^2-c^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S \right) \vec{b} + \left(c^2+a^2-b^2+\frac{4}{\sqrt{3}}S \right) \vec{c} \right\} \quad \text{答}$$

(4) 点Pが第1 Brocard (ブロカール) 点のとき

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \omega$$

【解答】 $AP=x$, $BP=y$, $CP=z$ とおく。

$\angle APC = B+C = 180^\circ - A$ より, $\triangle PCA$ に正弦定理を適用すると,

$$\frac{x}{\sin \omega} = \frac{b}{\sin(180^\circ - A)} \text{ より,}$$

$$x = \frac{b \sin \omega}{\sin A} = \frac{b \sin \omega}{\frac{2S}{bc}} = \frac{b^2 c \sin \omega}{2S} \quad \dots\textcircled{1}$$

同様に, $\angle BPA = C+A = 180^\circ - B$ より,

$\triangle PAB$ に正弦定理を適用すると,

$$\frac{y}{\sin \omega} = \frac{c}{\sin(180^\circ - B)} \text{ より, } y = \frac{c \sin \omega}{\sin B} = \frac{c \sin \omega}{\frac{2S}{ca}} = \frac{c^2 a \sin \omega}{2S} \quad \dots\textcircled{2}$$

$$\triangle PAB \text{ に余弦定理を適用すると, } \cos(180^\circ - B) = -\cos B = \frac{x^2 + y^2 - c^2}{2xy} = -\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

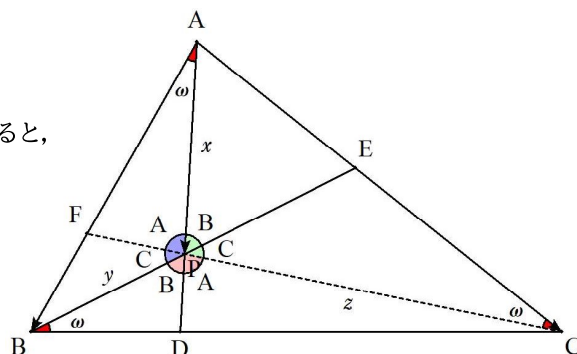
分母を払って移項すると, $ca(x^2 + y^2 - c^2) + (c^2 + a^2 - b^2)xy = 0$

これに, ①, ②を代入すると,

$$ca \left\{ \left(\frac{b^2 c \sin \omega}{2S} \right)^2 + \left(\frac{c^2 a \sin \omega}{2S} \right)^2 - c^2 \right\} + (c^2 + a^2 - b^2) \cdot \frac{b^2 c \sin \omega}{2S} \cdot \frac{c^2 a \sin \omega}{2S} = 0$$

$$\text{両辺を } c^2 a \text{ で割り移項すると, } \left\{ \frac{b^4}{4S^2} + \frac{c^2 a^2}{4S^2} + \frac{b^2(c^2 + a^2 - b^2)}{4S^2} \right\} \sin^2 \omega = 1$$

$$\sin^2 \omega = \frac{4S^2}{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2} \quad \sin \omega > 0 \text{ より, } \sin \omega = \frac{2S}{\sqrt{b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2}}$$



これを①, ②に代入して, $x = \frac{b^2c}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$, $y = \frac{c^2a}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$ となるから, 同様に,

$$z = \frac{a^2b}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}} \quad (\text{これら3式を③とする。})$$

次に, $\triangle PBD$ に正弦定理を適用すると, $\frac{BD}{\sin B} = \frac{y}{\sin(180^\circ - (B + \omega))} \therefore BD = \frac{y \sin B}{\sin(B + \omega)}$

同様に, $\triangle PDC$ に正弦定理を適用すると, $\frac{DC}{\sin A} = \frac{z}{\sin(B + \omega)} \therefore DC = \frac{z \sin A}{\sin(B + \omega)}$

BD:DC を③を用いて計算する。

$$BD:DC = \frac{y \sin B}{\sin(B + \omega)} : \frac{z \sin A}{\sin(B + \omega)} = \frac{\sin B}{\sin A} : \frac{z}{y} = \frac{b}{a} : \frac{a^2b}{c^2a} = c^2:a^2$$

同様に, $CE:EA = a^2:b^2$ となるから, 公式により,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{b^2}{c^2a^2 + (c^2 + a^2)b^2} (a^2\vec{b} + c^2\vec{c}) = \frac{b^2(a^2\vec{b} + c^2\vec{c})}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} \quad \text{図}$$

補足 点Pが第2 Brocard (プロカル) 点のとき

($\angle PAC = \angle PBA = \angle PCB = \omega$)

第1 Brocard (プロカル) 点のときと同様に計算して,

$$\overrightarrow{AP} = \frac{c^2(b^2\vec{b} + a^2\vec{c})}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} \quad \text{図}$$

別解

$$\triangle PBC = \frac{1}{2}az \sin \omega = \frac{1}{2}az \cos \omega \tan \omega = \frac{a^2 + z^2 - y^2}{4} \tan \omega$$

$$\text{同様に, } \triangle PCA = \frac{b^2 + x^2 - z^2}{4} \tan \omega, \quad \triangle PAB = \frac{c^2 + y^2 - x^2}{4} \tan \omega$$

$\triangle PBC + \triangle PCA + \triangle PAB = \triangle ABC$ より,

$$\frac{1}{2} \{ (a^2 + z^2 - y^2) + (b^2 + x^2 - z^2) + (c^2 + y^2 - x^2) \} \tan \omega = S \quad \therefore \tan \omega = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$(4S)^2 = 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$ であるから,

$$\sin \omega = \frac{\tan \omega}{\sqrt{1 + \tan^2 \omega}} = \frac{\frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2}} = \frac{4S}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + (4S)^2}} = \frac{2S}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

$\triangle PAB$ に正弦定理を適用して, $\frac{x}{\sin A} = \frac{c}{\sin(180^\circ - A)}$

$$x = \frac{c}{\sin A} \sin \omega = \frac{c}{\frac{2S}{bc}} \cdot \frac{2S}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}} = \frac{bc^2}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

$$\text{同様に, } y = \frac{ca^2}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}, \quad z = \frac{ab^2}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\triangle PAB}{\triangle PCA} = \frac{cy}{bx} = \frac{c \cdot ca^2}{b \cdot bc^2} = \frac{a^2}{b^2} \quad \therefore BD:DC = a^2:b^2 \quad \text{同様に, } CE:EA = b^2:c^2$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{AP} = \frac{c^2}{a^2b^2 + (a^2 + b^2)c^2} (b^2\vec{b} + c^2\vec{c}) = \frac{c^2(b^2\vec{b} + a^2\vec{c})}{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2} \quad \text{図}$$

(5) 点PがLemoine (ルモワース) 点のとき

三角形の角の二等分線に関して中線を折り返した3直線の交点。

【解答】 図のように、 $AL=l$ ， BM を中線ととくと、 $LC=\frac{a}{2}$ ， $BD=a_1$ ， $AD=d$ ， $\angle BAD=\angle CAL=\alpha$ とおく。

$$\text{中線定理により，} 2\left\{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + l^2\right\} = b^2 + c^2 \quad \therefore 4l^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle ABD \text{ に正弦定理を適用すると，} \frac{a_1}{\sin \alpha} = \frac{d}{\sin B} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\triangle ACL \text{ に正弦定理を適用すると，} \frac{\frac{a}{2}}{\sin \alpha} = \frac{l}{\sin C} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{3} \text{ を辺々計算すると，} \frac{2a_1}{a} = \frac{d \sin C}{l \sin B} = \frac{cd}{bl} \quad \therefore d = \frac{2a_1 bl}{ca} \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\triangle ABD \text{ に余弦定理を適用すると，} d^2 = a_1^2 + c^2 - 2a_1 c \cos B$$

$$\text{これに} \textcircled{4} \text{ と } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{ を代入すると，}$$

$$\left(\frac{2a_1 bl}{ca}\right)^2 = a_1^2 + c^2 - 2a_1 c \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\text{両辺に } c^2 a^2 \text{ を掛けると，} 4b^2 l^2 a_1^2 = c^2 a^2 a_1^2 + c^4 a^2 - c^2 a(c^2 + a^2 - b^2) a_1$$

$$\textcircled{1} \text{ を代入して移項すると，} \{b^2(2b^2 + 2c^2 - a^2) - c^2 a^2\} a_1^2 + c^2 a(c^2 + a^2 - b^2) a_1 - c^4 a^2 = 0$$

$$(b^2 + c^2)(2b^2 - a^2) a_1^2 + c^2 a(c^2 + a^2 - b^2) a_1 - c^4 a^2 = 0$$

$$\text{たすきがけをつくる。} \begin{array}{rcl} b^2 + c^2 & \times & -c^2 a \longrightarrow -2ab^2 c^2 + a^3 c^2 \\ 2b^2 - a^2 & & c^2 a \longrightarrow ab^2 c^2 + ac^4 \\ \hline & & c^2 a(c^2 + a^2 - b^2) \end{array}$$

$$\therefore \{(b^2 + c^2) a_1 - c^2 a\} \{(2b^2 - a^2) a_1 + c^2 a\} = 0$$

$$\text{題意に適するのは，} a_1 = \frac{c^2 a}{b^2 + c^2} = BD \quad \text{このとき，} DC = a - a_1 = \frac{ab^2}{b^2 + c^2}$$

$$\therefore BD : DC = \frac{c^2 a}{b^2 + c^2} : \frac{ab^2}{b^2 + c^2} = c^2 : b^2 \quad \text{同様に，} CE : EA = a^2 : c^2$$

$$\text{よって，公式により，} \overrightarrow{AP} = \frac{c^2}{c^2 a^2 + (c^2 + b^2) c^2} (b^2 \vec{b} + c^2 \vec{c}) = \frac{b^2 \vec{b} + c^2 \vec{c}}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{答}$$

(6) 点 P が Kiepert (キーペルト) 点のとき

$\triangle ABC$ の外側に各辺を底辺とし，相似な二等辺三角形 $\triangle A'BC$ ，

$\triangle B'CA$ ， $\triangle C'AB$ をつくるとき， AA' ， BB' ， CC' の交点。

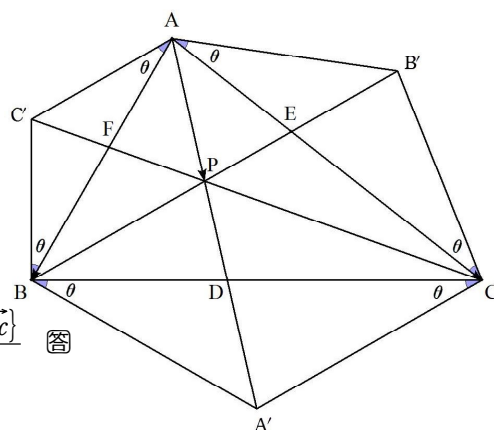
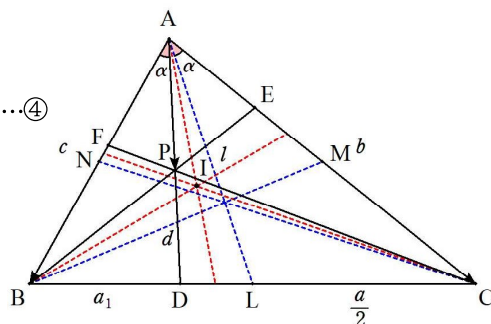
二等辺三角形を $\triangle ABC$ の外側につくったときの低角を θ ，

内側につくったときの低角を $-\theta$ とし， $d = 4S \cot \theta$ とする。

$\theta = 60^\circ$ のとき，フェルマー点となる。

紙面の関係で結果だけの掲載とする。

$$\overrightarrow{AP} = \frac{(-a^2 + b^2 + c^2 + d)\{(a^2 + b^2 - c^2 + d)\vec{b} + (a^2 - b^2 + c^2 + d)\vec{c}\}}{2d\{a^2 + b^2 + c^2 + 2(\tan \theta + 3\cot \theta)S\}} \quad \text{答}$$



4. おわりに

参考文献を執筆する際にも書いたが，三角形の五心の位置ベクトルを求めさせる入試問題が出題されている。今回計算した五心以外の点（ジェルゴンヌ点など）については高校では習わないから，ほとんど計算されたことがないと思われる。だから計算してみようと思った。また，五心以外の点（ジェルゴンヌ点など）に関する問題を考える際に，アプロ

一チのヒントになれば幸いである。

今回、五心以外の点（ジェルゴンヌ点など）の位置ベクトルを求めるに当たって、 $BD : DC$, $CE : EA$ を求めることによって、 $\overrightarrow{AP}$ を求める公式をまず考えた。参考文献を執筆する際には考えることができなかった。

【参考文献】

- [1] 時岡郁夫, 初等数学第 93 号, 三角形の五心の位置ベクトルと内積, 2022.5

(2023/1/19)