

自然対数について

(I) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ と自然対数

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ とおくと、二項定理によって

$$a_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1) \cdots \{n-(n-1)\}}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$\therefore a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad ①$$

ここで $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{r}{n}\right) < 1, (r=1, 2, \dots, n-1)$ であるから

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad ②$$

そして $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 > 2^2, 4! = 3! \cdot 4 > 2^3, \dots, n! > 2^{n-1}$

$$\therefore 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad ③$$

右辺の第2項以降は、初項1、公比 $\frac{1}{2}$ 、項数 n の等比数列の和であるから

$$\text{右辺} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \quad ④$$

$$\text{②, ③, ④より } a_n < 3 \quad ⑤$$

次に、①における n の代わりに $n+1$ とおくと、

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \quad ⑥$$

①と⑥の右辺を比較すると、初めの2項は相等しく第3項以降は同じ番目の項は⑥の方が大きく、かつ、⑥は最後に正の項を1つ①よりも多く有する。

$$\therefore a_n < a_{n+1} \quad ⑦$$

⑤と⑦から数列 $\{a_n\}$ は増加数列で n のいかんにかかわらず $a_n < 3$ であることがわかる。従って、数列 $\{a_n\}$ は収束し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は有限確定である。

$$\text{そこでこの極限値を } e \text{ で表わすと } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e は円周率 π と同様に一つの無理数で、 $e = 2.718281828459045 \dots$ (ふな一鉢二鉢一鉢二鉢しごくおいしい) である。

この極限值 e を底とする対数を考えることは数学の理論を研究するのに重要なことで、 e を底とする対数を **自然対数** または **Napier の対数** という。

この後別に断りがない限り $\log x$ と書いてあれば $\log_e x$ の意、すなわち自然対数の意に解するものと定めておく。

【注意】 常用対数 $\log_{10} x$ も $\log x$ と書くが、これは対数表を引いていろいろな計算をする場合で、微分したり積分したりするときの $\log x$ は $\log_e x$ の意味である。

$$(II) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ から導かれる公式}$$

x を 1 より大きい実数とすると、 $n+1 > x \geq n$ であるような正の整数 n が必ず存在するから、このような n を取って考えると、

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}, \text{ 従って } 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\text{ところが, } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \times 1 = e$$

そして $x \rightarrow \infty$ のときは $n \rightarrow \infty$

$$\text{ゆえに, } x \text{ を実数とすると, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \textcircled{1}$$

次に、 $x = -t$ とおくと、 $x \rightarrow -\infty$ のときは $t \rightarrow \infty$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = e \times 1 = e$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \textcircled{2}$$

$$\text{次に, } \textcircled{1} \text{ によって } \lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e, \quad \textcircled{2} \text{ によって } \lim_{x \rightarrow -0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \textcircled{3}$$

(Ⅲ) 対数関数の導関数

(1) $y = \log x$ (自然対数)

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \rightarrow 0} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

ここで $\frac{h}{x} = t$ とおくと $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$

$$y' = \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}$$

$$\therefore (\log x)' = \frac{1}{x}$$

(2) $y = \log_a x$ ($a > 0, \neq 1$)

底の変換公式より $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ であるから $y' = \frac{1}{x \log a}$

$$\therefore (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

(3) $y = \log|x|$ のとき

$$x > 0 \text{ のとき } (\log|x|)' = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$x < 0 \text{ のとき } (\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore (\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\text{同様に } (\log_a|x|)' = \frac{1}{x \log a}$$

(Ⅳ) 指数関数の導関数

$y = a^x$ の両辺の自然対数をとると $\log y = x \log a$

$$\text{両辺を } x \text{ で微分すると } \frac{y'}{y} = \log a$$

$$\text{よって } y' = y \log a = a^x \log a$$

$$\therefore (a^x)' = a^x \log a$$

$$\text{特に, } a = e \text{ のとき } \therefore (e^x)' = e^x$$

<演習> $y = e^x$ の導関数を定義に従って求めよ。