

関数の展開について

1 テーラーの定理

$f(x)$ およびその第1次から第 n 次までの導関数が区間 (a, b) において連続であるとき, 区間 (a, b) 内のある値 x について次の公式が成立する。

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(c), \quad a < c < b \quad ①$$

テーラーの定理は平均値の定理を一般化したものになっている。実際, 上の式において $n=1$ としたもの, つまり $f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$ は平均値の定理に他ならない。

また, テーラーの定理の証明には平均値の定理が用いられる。

①の式で $x = a + h$ とし, a の代わりに x とおけば

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n$$

もし剰余 R_n が $n \rightarrow \infty$ のとき 0 となれば, $f(x+h)$ は h の無限級数に展開される。

$x=0$ とおき, h を x とおけば

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \cdots \quad (\text{マクローリンの級数})$$

また, x を a , h を x とおけば

$$f(x+a) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!} x^2 + \frac{f'''(a)}{3!} x^3 + \cdots \quad (\text{テーラーの級数})$$

2 $|x|$ が小さいとき

$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ とかけるときは, 順次微分していった, $f(0), f'(0), f''(0), \cdots$ から $c_0, c_1, c_2, \cdots$ を定めることができる。 $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, f^{(0)}(0) = f(0), 0! = 1$

3 テーラーの定理の応用例

(1) 二項級数

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \cdots \quad (|x| < 1 \text{ で, } m \text{ は任意の実数})$$

$$① \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$② \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$③ \quad \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 - \frac{5}{128} x^4 + \frac{7}{256} x^5 - \frac{21}{1024} x^6 + \cdots$$

(2) 指数級数

$$① \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\text{特に} \quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

(3) 対数級数

$$\textcircled{1} \quad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$

$$\textcircled{2} \quad \log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \quad (-1 \leq x < 1)$$

$$\textcircled{3} \quad \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) \quad (-1 < x < 1)$$

(4) 正弦級数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

(5) 余弦級数

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

(6) 逆三角関数 (高校では扱わない)

$$\textcircled{2} \quad \sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (|x| \leq 1)$$

$$\textcircled{2} \quad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

【参考】 $y = \tan^{-1} x$ とおくと, $x = \tan y$

$$\text{両辺を } y \text{ で微分すると, } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\text{よって, } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$|x| < 1 \text{ のとき } \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad (\text{無限等比級数})$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

$$y = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots) dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$x = 0 \text{ のとき } y = 0 \text{ であるから } C = 0$$

したがって

$$y = \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad \text{【終】}$$

$$\text{特に } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \quad (\text{Leibniz の級数})$$

$$\text{また } \frac{\pi}{4} = \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}, \quad \frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239} \quad (\text{Machin, 1706})$$

4 オイラーの公式

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

x の代わりに ix を代入すると

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$

$$\therefore e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (\text{オイラーの公式})$$

特に $x = \pi$ を代入すると $e^{i\pi} = -1 \quad \therefore e^{i\pi} + 1 = 0$ (オイラーの等式)

5 無限級数 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ の証明

一般に, $f(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \left(1 - \frac{x}{\alpha_3}\right) \dots$ とおくと,

$f(0) = 1$, 方程式 $f(x) = 0$ の解は, $x = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ である。

今, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ とおくと

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \text{であるから} \quad f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \quad \textcircled{1}$$

①は, $f(0) = 1$ を満たす。

また, 方程式 $\frac{\sin x}{x} = 0$ の解は $x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$

よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \dots \\ &= 1 - \frac{1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) x^2 + \frac{1}{\pi^4} \left(\frac{1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{1^2 \cdot 4^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{1^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2} + \dots\right) x^4 - \dots \quad \textcircled{2} \\ &= 1 - \frac{x^2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} + \frac{x^4}{\pi^4} \sum_{\substack{i=1, j=2, \\ i < j}}^{\infty} \frac{1}{i^2 j^2} - \frac{x^6}{\pi^6} \sum_{\substack{i=1, j=2, \\ k=3, i < j < k}}^{\infty} \frac{1}{i^2 j^2 k^2} + \dots \end{aligned}$$

①と②の x^2 の係数を比較すると

$$-\frac{1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right) = -\frac{1}{3!}$$

両辺に $-\pi^2$ を掛けると

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

6 π と e の近似値の求め方 (一例)

$$(1) \pi = 16 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \times 5^3} + \frac{1}{5 \times 5^5} - \frac{1}{7 \times 5^7} + \cdots \right) - 4 \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \times 239^3} + \cdots \right) \quad (\text{Machin の公式より})$$

$\frac{16}{5} = 3.200000$		[1]	
$\frac{16}{5^3} = 0.128000$	$\div 3 = 0.042666$	[2]	0.042666
$\frac{16}{5^5} = 0.005120$	$\div 5 = 0.001024$	[3]	0.000029
$\frac{16}{5^7} = 0.000204$	$\div 7 = 0.000029$	[4]	0.016736
$\frac{16}{5^9} = 0.000008$	$\div 9 = 0.000000$	[5]	0.059431
$\frac{4}{239} = 0.016736$		[6]	
$\frac{4}{239^3} = 0.000000$		[7]	

$[2] + [4] + [6]$
 $[1] + [3]$
 $-([2] + [4] + [6])$
 $= 3.141593$

実際, $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 \cdots$ であるから, これだけの計算で小数第 5 位まで正しいことがわかる。

$$(2) e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \quad (\text{指数級数より})$$

小数第 7 位まで計算してみると

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{1!} &= 2.0000000 \\
 \frac{1}{2!} &= 0.5000000 \\
 \frac{1}{3!} &= \frac{1}{2!} \div 3 = 0.1666666 \\
 \frac{1}{4!} &= \frac{1}{3!} \div 4 = 0.0416666 \\
 \frac{1}{5!} &= \frac{1}{4!} \div 5 = 0.0083333 \\
 \frac{1}{6!} &= \frac{1}{5!} \div 6 = 0.0013888 \\
 \frac{1}{7!} &= \frac{1}{6!} \div 7 = 0.0001984 \\
 \frac{1}{8!} &= \frac{1}{7!} \div 8 = 0.0000248 \\
 \frac{1}{9!} &= \frac{1}{8!} \div 9 = 0.0000027 \\
 +) \frac{1}{10!} &= \frac{1}{9!} \div 10 = 0.0000002 \\
 \hline
 &2.7182814
 \end{aligned}$$

$e = 2.718281828459045 \cdots$ であるから, これだけの計算で小数第 6 位まで正しいことが分かる。