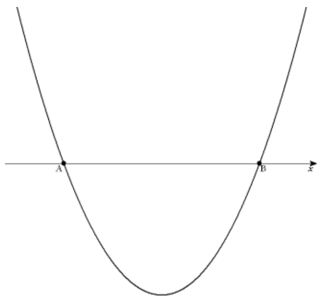
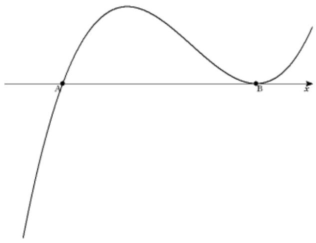
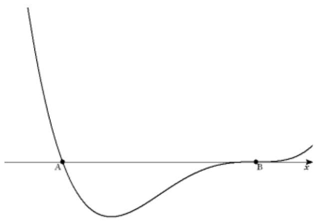
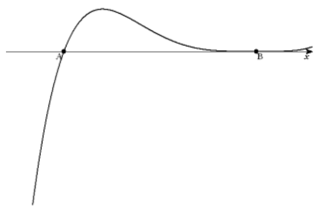
■曲線　$y=(x-\alpha)^m(x-\beta)^n$　と $x$ 軸とによって囲まれた部分の面積 $S$ （$m,n$ は正の整数，$\alpha<\beta$）

1. $m=1$ のとき　$y=(x-\alpha)(x-\beta)^n$

①　$n=1$　　②　$n=2$　　③　$n=3$　　④　$n=4$

$$S=(-1)^n\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^n\,dx=(-1)^n\int_\alpha^\beta (x-\beta+\beta-\alpha)(x-\beta)^n\,dx$$

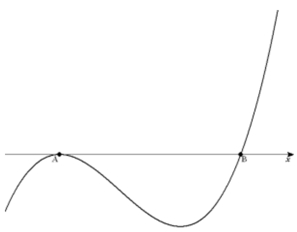
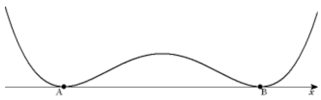
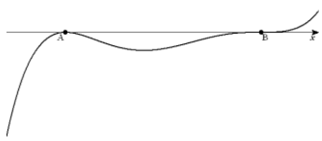
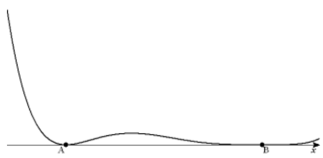
$$=(-1)^n\int_\alpha^\beta\left\{(x-\beta)^{n+1}+(\beta-\alpha)(x-\beta)^n\right\}dx=(-1)^n\left[\frac{1}{n+2}(x-\beta)^{n+2}+\frac{\beta-\alpha}{n+1}(x-\beta)^{n+1}\right]_\alpha^\beta$$

$$=-(-1)^n\left\{\frac{1}{n+2}(\alpha-\beta)^{n+2}+\frac{\beta-\alpha}{n+1}(\alpha-\beta)^{n+1}\right\}=\left(-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\right)(\beta-\alpha)^{n+2}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}(\beta-\alpha)^{n+2}$$

2. $m=2$ のとき　$y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^n$

①　$n=1$　　②　$n=2$　　③　$n=3$　　④　$n=4$

$$(x-\alpha)^2=(x-\beta+\beta-\alpha)^2=(x-\beta)^2+2(\beta-\alpha)(x-\beta)+(\beta-\alpha)^2$$

であるから①と同様に計算して

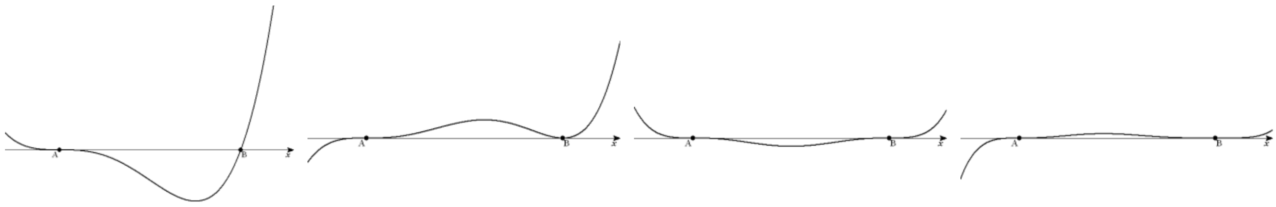
$$S=(-1)^n\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^2(x-\beta)^n\,dx$$

$$=(-1)^n\left[\frac{(x-\beta)^{n+3}}{n+3}+\frac{2(\beta-\alpha)(x-\beta)^{n+2}}{n+2}+\frac{(\beta-\alpha)^2(x-\beta)^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^\beta$$

$$=\left(\frac{1}{n+3}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+1}\right)(\beta-\alpha)^{n+3}=\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}(\beta-\alpha)^{n+3}$$

3. $m=3$ のとき　$y=(x-\alpha)^3(x-\beta)^n$

①　$n=1$　　②　$n=2$　　③　$n=3$　　④　$n=4$



$$(x-\alpha)^3=(x-\beta+\beta-\alpha)^3=(x-\beta)^3+3(\beta-\alpha)(x-\beta)^2+3(\beta-\alpha)^2(x-\beta)+(\beta-\alpha)^3$$

であるから同様に計算して

$$S=(-1)^n\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3(x-\beta)^n\,dx$$

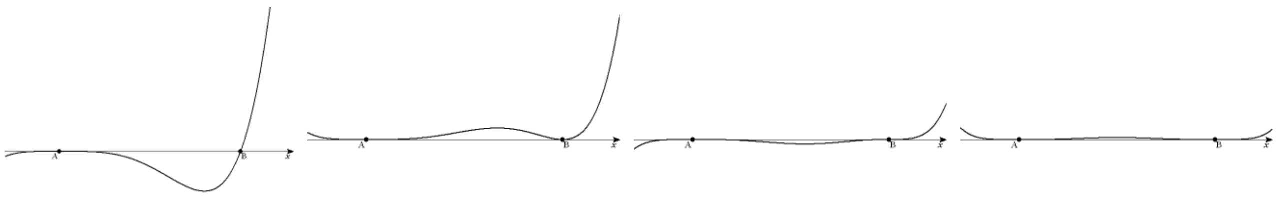
$$=(-1)^n\left[\frac{(x-\beta)^{n+4}}{n+4}+\frac{3(\beta-\alpha)(x-\beta)^{n+3}}{n+3}+\frac{3(\beta-\alpha)^2(x-\beta)^{n+2}}{n+2}+\frac{(\beta-\alpha)^3(x-\beta)^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^\beta$$

$$=\left(-\frac{1}{n+4}+\frac{3}{n+3}-\frac{3}{n+2}+\frac{1}{n+1}\right)(\beta-\alpha)^{n+4}=\frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}(\beta-\alpha)^{n+4}$$

$$=\frac{3!}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}(\beta-\alpha)^{n+4}$$

4. $m=4$ のとき　$y=(x-\alpha)^4(x-\beta)^n$

①　$n=1$　　②　$n=2$　　③　$n=3$　　④　$n=4$



$$(x-\alpha)^4=(x-\beta+\beta-\alpha)^4$$

$$=(x-\beta)^4+4(\beta-\alpha)(x-\beta)^3+6(\beta-\alpha)^2(x-\beta)^2+4(\beta-\alpha)^3(x-\beta)+(\beta-\alpha)^4$$

であるから同様に計算して

$$S=(-1)^n\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^4(x-\beta)^n\,dx$$

$$=\frac{24}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}(\beta-\alpha)^{n+5}=\frac{4!}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}(\beta-\alpha)^{n+5}$$

5.　一般に　$y=(x-\alpha)^m(x-\beta)^n$ のとき

$S=(-1)^n\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx=\dfrac{m!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m+1)}(\beta-\alpha)^{n+m+1}=\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ と推察される。

（証明）

$S=(-1)^n\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n\,dx=I_{m,n}$ とおき，部分積分法を適用する。

$u=(x-\alpha)^m, v'=(x-\beta)^n$ とおくと， $u'=m(x-\alpha)^{m-1}, v=\dfrac{1}{n+1}(x-\beta)^{n+1}$

$$I_{m,n}=(-1)^n\left\{\left[(x-\alpha)^m\cdot\frac{1}{n+1}(x-\beta)^{n+1}\right]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta m(x-\alpha)^{m-1}\cdot\frac{1}{n+1}(x-\beta)^{n+1}dx\right\}$$

$$=\frac{m}{n+1}\cdot(-1)^{n+1}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m-1}(x-\beta)^{n+1}dx=\frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1}=\frac{m}{n+1}\frac{m-1}{n+2}I_{m-2,n+2}$$

$$=\frac{m}{n+1}\frac{m-1}{n+2}\cdots\frac{1}{n+m}I_{0,n+m}=\frac{m!n!}{(m+n)!}I_{0,n+m}$$

ここで,

$$I_{0,m+n}=(-1)^{m+n}\int_\alpha^\beta (x-\beta)^{m+n}dx=(-1)^{m+n}\left[\frac{1}{m+n+1}(x-\beta)^{m+n+1}\right]_\alpha^\beta$$

$$=(-1)^{m+n+1}\frac{(\alpha-\beta)^{m+n+1}}{m+n+1}=\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}$$

であるから

$$I_{m,n}=\frac{m!n!}{(m+n)!}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$ （終証）（2010/9/15）

【例 1】曲線 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ と $x$ 軸とによって囲まれた部分の面積 $S$

（解） $m=n=2, \alpha=1, \beta=3$ であるから $S=\dfrac{2!2!}{5}!(3-1)^5=\dfrac{16}{15}$

【例 2】曲線 $y=(x-1)^3(x-3)^2$ と $x$ 軸とによって囲まれた部分の面積 $S$

（解） $m=3, n=2, \alpha=1, \beta=3$ であるから $S=\dfrac{3!2!}{6!}(3-1)^6=\dfrac{16}{15}$

（2010/9/13）